2008年12月15日　物理学コロキウム第二

ニュートリノおよび反ニュートリノと核子･原子核の反応

内容:

1. ニュートリノ散乱における反跳陽子の測定
2. Bethe-Blochの式と飛程（stopping　range）
3. SciBooNE実験
4. まとめ

柴田研究室
05_05556　岡村　勇介

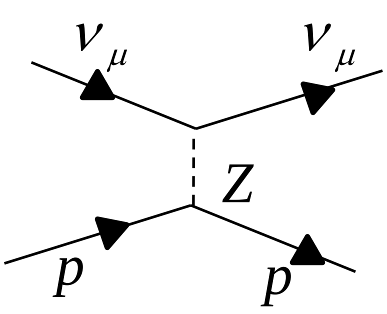
1. ニュートリノ散乱における反跳陽子の測定

　ニュートリノは素粒子のレプトンの一種で、電荷と色電荷はもたず弱電荷のみをもつ。弱い相互作用のみをする。電子ニュートリノ、μ ニュートリノ、τ ニュートリノの3種類がある。

　反ニュートリノはニュートリノの反粒子である。

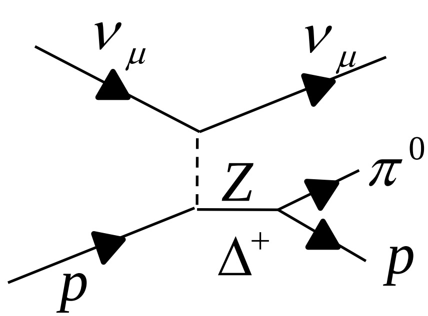
　ニュートリノと核子の相互作用には、中性流の相互作用 (ボーズ粒子Zが媒介する) と、荷電流の相互作用 (ボーズ粒子Wが媒介する) がある。

中性流の反応



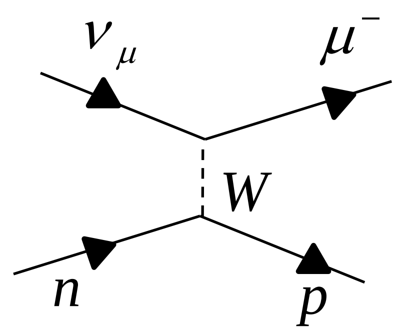
$$\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p$$

弾性散乱

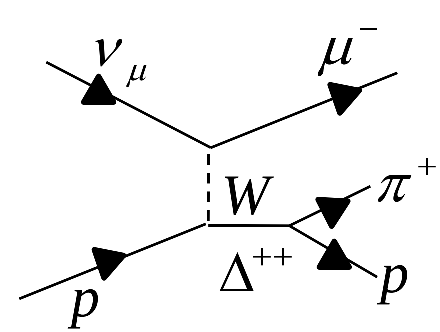


π 中間子生成

荷電流の反応



$$\nu_\mu + n \to \mu^- + p$$



π 中間子生成

ニュートリノ－核子反応

・ニュートリノビームを標的にあてる。

・反跳された陽子の飛程を測定する。

標的が軌跡の検出器にもなっている (active target)

Bethe-Blochの式

重荷電粒子(陽子、π中間子、μ^{-}..)が物質中を進む時に、電子をイオン化することにより失うエネルギーを表す式。

この式から、物質中での重荷電粒子の飛程 (stopping range) を計算する。

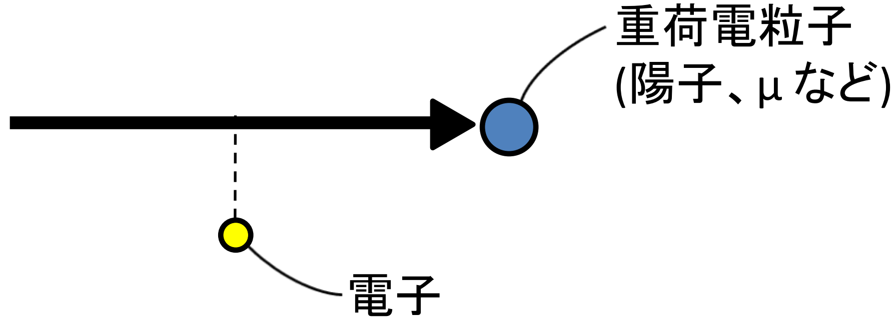
・反跳された陽子の**<u>運動エネルギーを決定する</u>**。

・反応の4元運動量移行 Q^2 を決定する。

・反応の微分断面積を Q^2 の関数として決定する。

2. Bethe-Blochの式と飛程(stopping range)

荷電粒子ビームによるイオン化



$$F(t;b) = \frac{ze^2 b}{4\pi\varepsilon_0 \{(Vt)^2 + b^2\}^{3/2}}$$ ……① 電子に働く力

この$F(t;b)$を用いて電子の運動方程式を解くと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \left(b/V\right)^2}} + \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm}$$ ……② 電子の移動速度

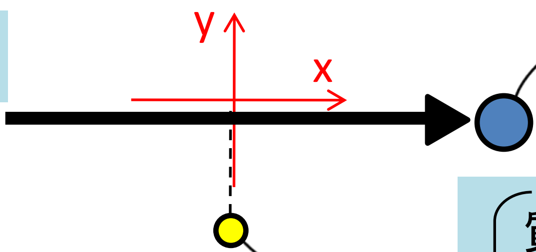
1個の電子をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー$E(b)$ は、

$$E(b) = \int_{y(t=-\infty)}^{y(t=\infty)} F(t;b)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t;b)\frac{dy}{dt}dt \underset{\because ①②}{=} \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 b^2 V^2 m}$$ ……③ 電子1個をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー

2. Bethe-Blochの式と飛程(stopping range)

荷電粒子ビームによるイオン化

時刻 t



重荷電粒子
(陽子、μなど)

$\begin{cases} \text{電荷} \ +ze \\ \text{速度} \ V \ (\text{十分大きい}) \end{cases}$

電子

$\begin{cases} \text{質量} \ m \\ \text{電荷} \ -e \\ \text{初めは静止} \end{cases}$

座標　重荷電粒子: $(Vt, 0)$
電子: $(0, y(t))$

$$F(t;b) = \frac{ze^2 b}{4\pi\varepsilon_0 \{(Vt)^2 + b^2\}^{3/2}}$$

……① 電子に働く力

この$F(t;b)$を用いて電子の運動方程式を解くと、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm}\frac{t}{\sqrt{t^2 + \left(b/V\right)^2}} + \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm}$$

……② 電子の移動速度

<u>1個の電子</u>をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー$E(b)$は、

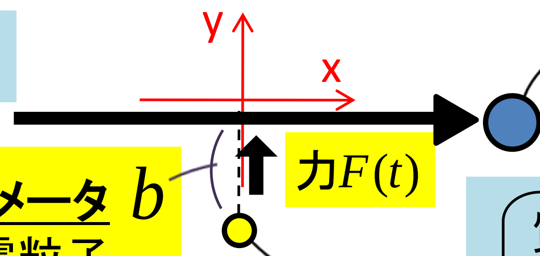
$$E(b) = \int_{y(t=-\infty)}^{y(t=\infty)} F(t;b)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t;b)\frac{dy}{dt}dt \underset{\because ①②}{=} \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 b^2 V^2 m}$$

……③ 電子1個をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー

2. Bethe-Blochの式と飛程(stopping range)

荷電粒子ビームによるイオン化

時刻 t



重荷電粒子(陽子、μなど)
- 電荷 $+ze$
- 速度 V (十分大きい)

<u>インパクトパラメータ</u> b
<u>(電子と重荷電粒子の軌跡の距離)</u>

電子
- 質量 m
- 電荷 $-e$
- 初めは静止

座標　重荷電粒子: $(Vt, 0)$
電子: $(0, y(t))$
(ただし、$y(t=-\infty)=-b$)

$$F(t;b)=\frac{ze^2b}{4\pi\varepsilon_0\{(Vt)^2+b^2\}^{3/2}}$$

……① 電子に働く力

このF(t;b)を用いて電子の運動方程式を解くと、

$$\frac{dy}{dt}=\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm}\frac{t}{\sqrt{t^2+\left(b/V\right)^2}}+\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bVm}$$

……② 電子の移動速度

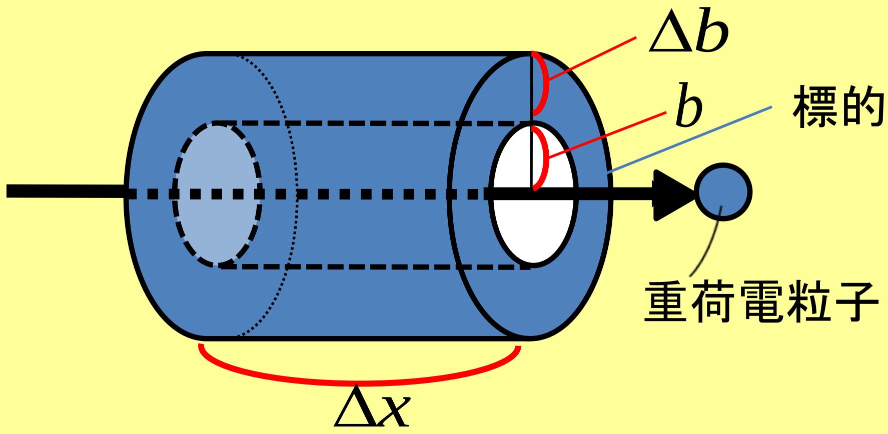
<u>1個の電子</u>をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー$E(b)$ は、

$$E(b)=\int_{y(t=-\infty)}^{y(t=\infty)}F(t;b)dy=\int_{-\infty}^{\infty}F(t;b)\frac{dy}{dt}dt\underset{\because ①②}{=}\frac{z^2e^4}{8\pi^2\varepsilon_0{}^2b^2V^2m}$$

……③ 電子1個をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー

（再掲） $E(b) = \dfrac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^{\ 2} b^2 V^2 m}$ ③ 電子1個をイオン化する際に重荷電粒子が失うエネルギー

次に、標的物質中での多数の原子のイオン化を考える。



このとき、標的の厚さ Δx 、<u>インパクトパラメータ</u>$b \sim b + \Delta b$ の間にある電子の数は $2\pi b n \Delta b \Delta x$

よって<u>重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギー</u> $\left(-\dfrac{dE}{dx} \right)$ は、

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{MIN}}^{b_{MAX}} E(b) \cdot 2\pi b n \cdot db \underset{\because ③}{=} \frac{z^2 e^4 n}{4\pi \varepsilon_0^{\ 2} V^2 m} \ln\left[\frac{b_{MAX}}{b_{MIN}} \right]$$

……④ 重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギー

ここで b_{MAX} , b_{MIN} は、重荷電粒子がイオン化できる電子のインパクトパラメータのそれぞれ最大値、最小値である。

次に、インパクトパラメータとイオン化ポテンシャルを考える。

物質	平均イオン化ポテンシャル
水素分子	15.6 (eV)
ヘリウム	36.0 (eV)
空気	80.5 (eV)
メタン	41.6 (eV)

物質ごとの平均イオン化ポテンシャル

- b_{MAX} :「電子が重荷電粒子から得る静電ポテンシャル」＝「標的物質の電子の平均イオン化ポテンシャル I 」となるインパクトパラメータ

$$b_{MAX} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 I}$$ ……⑤ **インパクトパラメータの最大値**

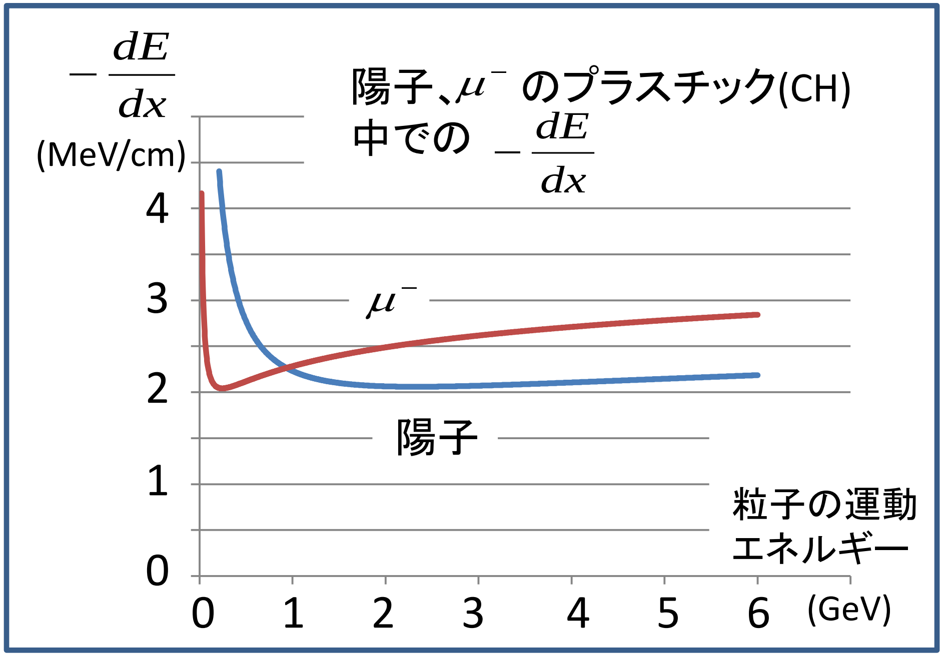
- b_{MIN} : 電子が重荷電粒子と衝突するようなインパクトパラメータ

$$\Leftrightarrow \quad y(t=0;b)=0$$

電子の運動方程式を解いて $y(t;b)$ を求め、代入すると

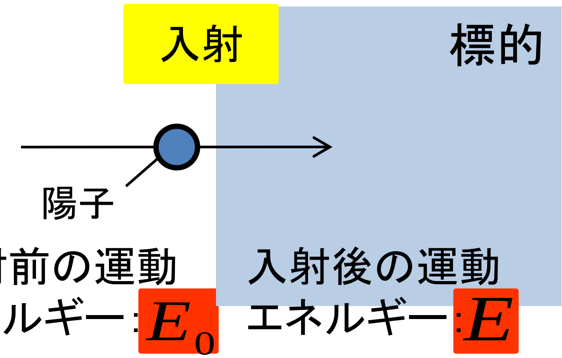
$$b_{MIN} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 V^2 m}$$ ……⑥ **インパクトパラメータの最小値**

よって、重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギーは、



$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 n}{4\pi\varepsilon_0{}^2 V^2 m} \ln\left[\frac{mV^2}{I}\right]$$ ……⑦ **Bethe-Blochの式**
(重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギー)

Bethe-Blochの式と飛程(stopping range)の計算

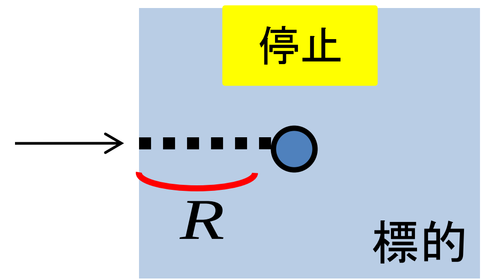


化合物標的でのBethe-Blochの式は、各元素標的でのBethe-Blochの式の和として決定される。

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{和}} = \sum_i \left(-\frac{dE}{dx}\right)_i$$

$$= \sum_i \frac{z^2 e^4 n_i}{4\pi\varepsilon_0{}^2 V^2 m} \ln\left[\frac{mV^2}{I_i}\right]$$

……⑧ **化合物標的でのBethe-Blochの式**



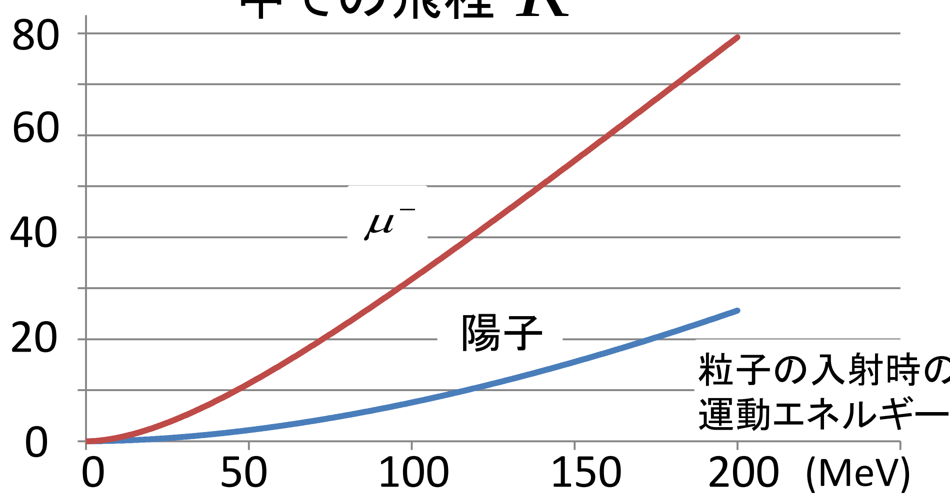
（ただし、i は各元素の物理量であることを示す）

Bethe-Blochの式から、次のように飛程 R が計算できる。ただしE_0, E はそれぞれ重荷電粒子の標的物質に侵入する前、および後の運動エネルギーである。

$$R(E_0) = \int_0^{E_0} \left\{-\frac{dE}{dx}\right\}^{-1} dE$$

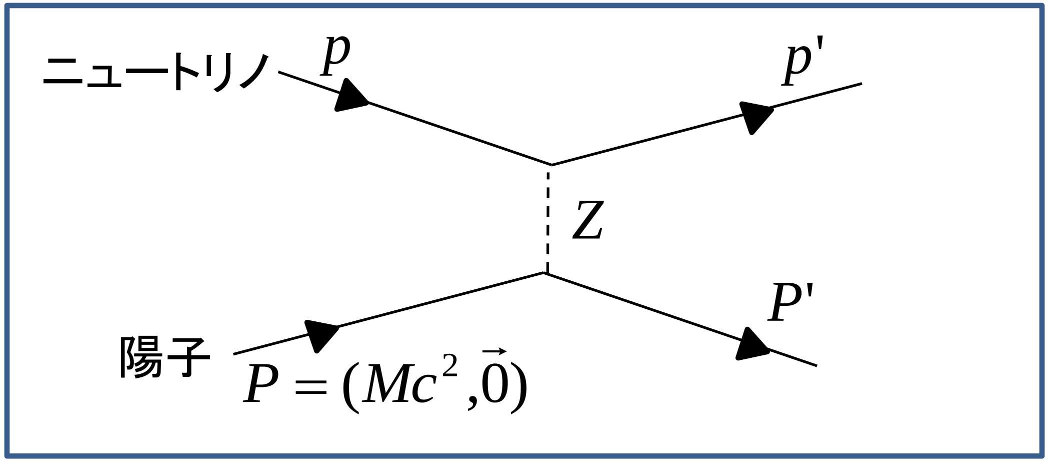
……⑨ **重荷電粒子の飛程**

陽子、μ^-のプラスチック(CH)中での飛程 R



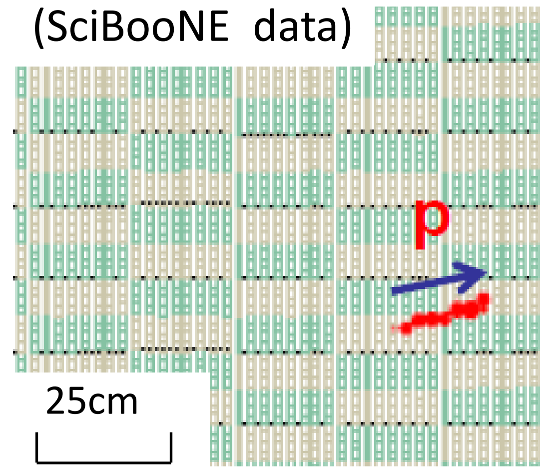
3. SciBooNE実験

ニュートリノ－核子の反応によってニュートリノの断面積を決定する実験。
決定された断面積は、ニュートリノ振動などの実験にも用いられる。



中性流の陽子の弾性散乱

(SciBooNE data)



SciBooNE実験　フェルミ国立研究所

$E_\upsilon \sim 1$ (GeV)

(プラスチックシンチレータが active targetになっている)

4元運動量移行 Q^2

$$Q^2 = (p'-p)^2$$ …散乱の前後のビーム(ニュートリノ)から計算

$$Q^2 = (P'-P)^2$$ …散乱の前後の陽子から計算

$$= -2MT$$ (M: 陽子の質量　T: 陽子の運動エネルギー)

陽子の運動エネルギーが決まると Q^2 が決まる。
散乱の微分断面積は Q^2 の関数である。

4. まとめ

・ニュートリノは素粒子のレプトンの一種で、弱い相互作用のみをする。
電子ニュートリノ、μ ニュートリノ、τ ニュートリノの3種類がある。
・弱い相互作用を媒介する粒子には、中性のボーズ粒子Zと、電荷をもつボーズ粒子Wがある。
・ニュートリノー核子反応の微分断面積を求めるために、反跳陽子の飛程から4元運動量移行 Q^2 を決定する。
飛程と運動エネルギーの関係を得るために、Bethe-Blochの式を用いる。
・Bethe-Blochの式、および飛程の式は、次のように表わされる。

Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 n}{4\pi\varepsilon_0{}^2 V^2 m} \ln\left[\frac{mV^2}{I}\right] \quad \text{(MeV/cm)}$$

電子の質量: m
重荷電粒子の電荷: ze
重荷電粒子の速度: V
標的物質の単位体積中の電子の数: n
標的物質の平均イオン化ポテンシャル: I

飛程 (stopping range)

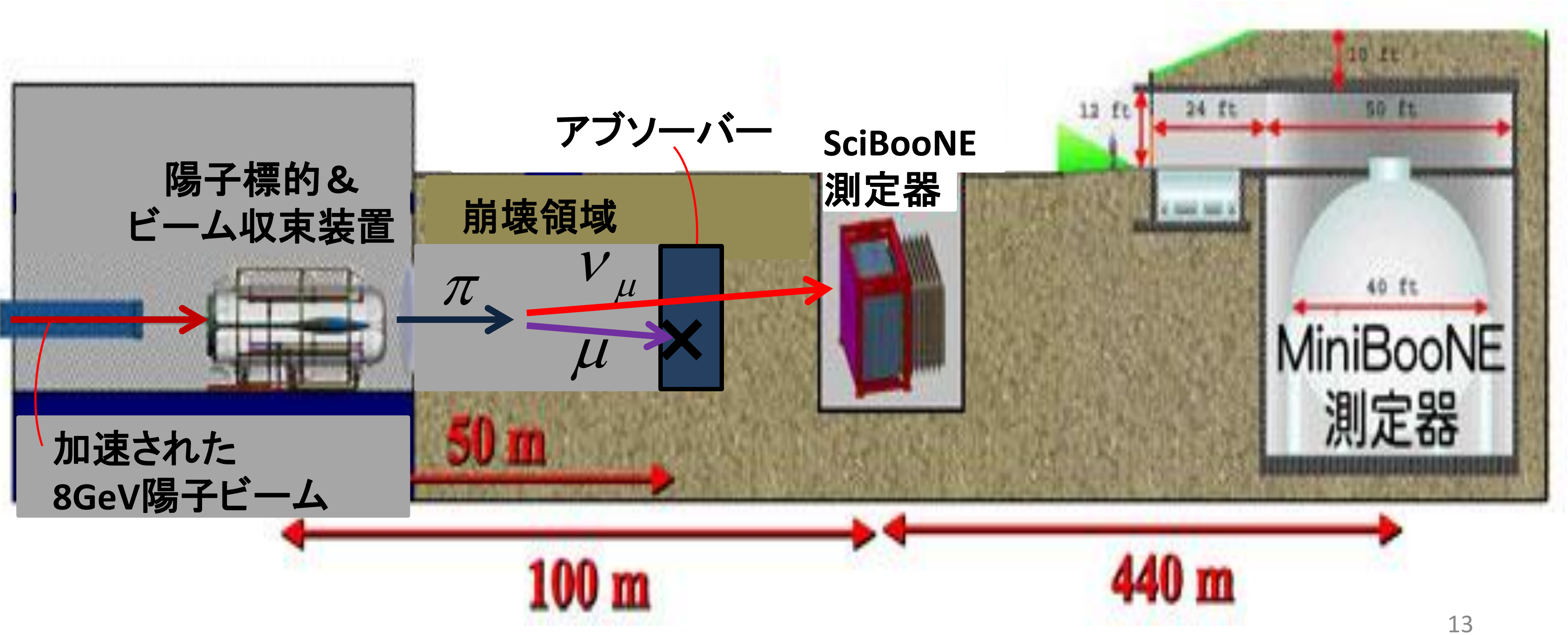
$$R(E_0) = \int_0^{E_0} \left\{-\frac{dE}{dx}\right\}^{-1} dE \quad \text{(cm)}$$

荷電粒子の標的入射時の運動エネルギー: E_0

今後の予定:
SciBooNE実験について勉強し、ニュートリノ散乱における反跳陽子のデータ解析を行う。

2. SciBooNE実験について

SciBooNE実験(SciBar Booster Neutrino Experiment):
　ニュートリノ(反ニュートリノ)と核子の正確な散乱断面積を測定するために、2007年6月から2008年8月まで、アメリカのイリノイ州にあるFermi Labで行われた実験。現在は実験で得られたデータの解析が行われている。



標的	b_{MIN} と b_{MAX}
水素	2.8×10^(-13) ～9.2×10^(-11)
空気	2.8×10^(-13) ～1.8×10^(-11)

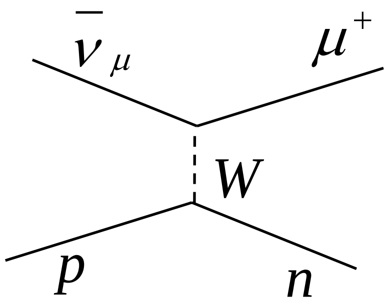
入射陽子の速度 $c/10$ の時のインパクトパラメータ

反ニュートリノと核子の反応

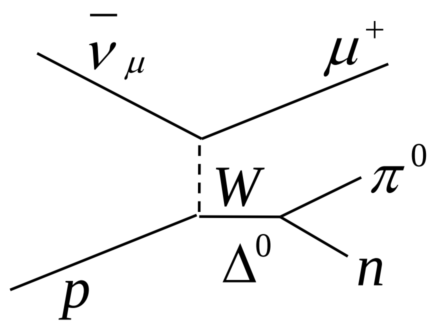
反ニュートリノと核子の反応にも、①電荷をもつWを交換する反応と、②中性のZを交換する反応の2種類がある。また、反応の前後で、電荷、レプトン数、バリオン数は保存する。

①Wを交換する反応には、以下の図のような準弾性散乱と非弾性散乱がある。

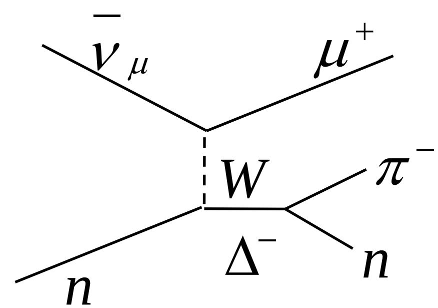
μニュートリノと中性子
の準弾性散乱



μニュートリノと陽子
の非弾性散乱

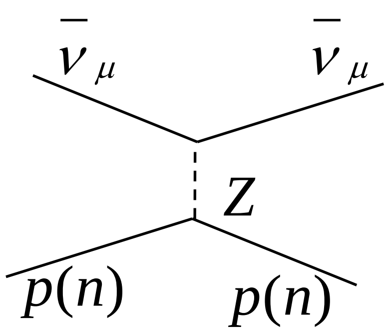


μニュートリノと中性子
の非弾性散乱

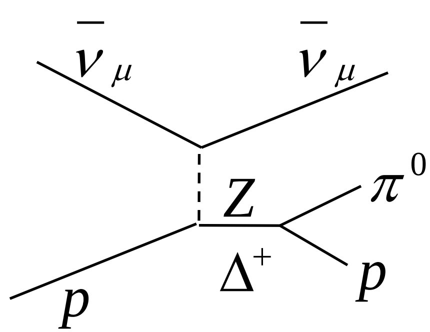


②Zを交換する反応には、以下の図のような弾性散乱と非弾性散乱がある。

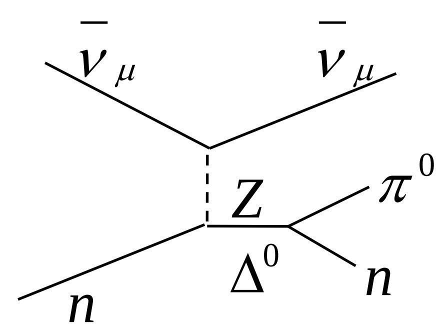
μニュートリノ陽子(中性子)
の弾性散乱



μニュートリノと陽子
の非弾性散乱



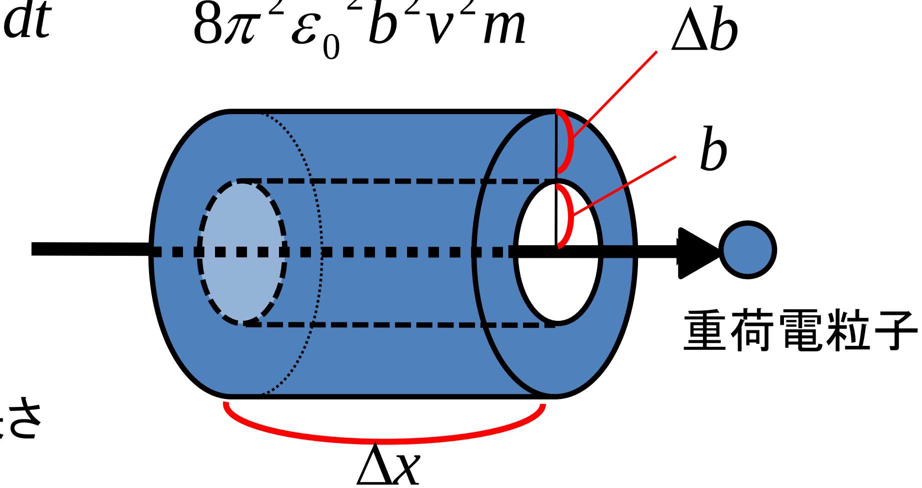
μニュートリノと中性子
の非弾性散乱



よって、電子の得るエネルギー、すなわち1個の電子を電離する際に重荷電粒子が失うエネルギーEは、

$$E(b)=\int_{y(t=-\infty)}^{y(t=\infty)}F(t;b)dy=\int_{-\infty}^{\infty}F(t;b)\frac{dy}{dt}dt=\frac{z^2e^4}{8\pi^2\varepsilon_0{}^2b^2v^2m}$$

標的物質の単位体積中の電子の数をnとする。重荷電粒子が厚さΔxの標的を通過するとき、距離b～b+Δbの間にある電子数は $2\pi bn\Delta b\Delta x$ で与えられる。



よって重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギーは、

$$-\frac{dE}{dx}=\int_{b_{\min}}^{b_{MAX}}E(b)\cdot 2\pi bn\cdot db=\frac{z^2e^4n}{4\pi\varepsilon_0{}^2v^2m}\ln\left[\frac{b_{MAX}}{b_{\min}}\right]$$

ここで b_{MAX}, $b_{\min}$ は、重荷電粒子がイオン化できる電子の距離のそれぞれ最大値、最小値である。

b_{MAX} は、標的物質の電子の平均イオン化ポテンシャル I を用いて、

$$I=\underbrace{\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b_{MAX}}}_{\text{電子の得る静電ポテンシャル}} \quad\Longrightarrow\quad b_{MAX}=\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 I}$$

$b_{\min}$ は、古典的には電子が重荷電粒子と衝突する距離と考えてよい。先ほどの電子に働く力F(t;b)を用いて電子の運動方程式を解くと、

$$y(t;b) = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 vmb}\sqrt{t^2 + \left(b/v\right)^2} + \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 bvm}t - b$$

電子が重荷電粒子に衝突する条件は「t=0においてy=0」であるから、

$$0 = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 v^2 m} - b \quad \Longrightarrow \quad b_{\min} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 v^2 m}$$

よって、重荷電粒子が標的物質中で単位長さあたりに失うエネルギーは、

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 n}{4\pi\varepsilon_0{}^2 v^2 m}\ln\left[\frac{mv^2}{I}\right]$$

さらに、相対論的な粒子についてより厳密な計算を行うと次の式が導かれる。

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 n}{4\pi\varepsilon_0{}^2 v^2 m}\left\{\ln\left[\frac{2mv^2}{I\left(1-\left(v/c\right)^2\right)}\right] - \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{\delta}{2}\right\}$$

数%の補正項
1-(v/c)^2 に依存

$$-\frac{dE}{dx} = Dz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2}{I(1-\beta^2)} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$ ....ベーテ･ブロッホの式

δ：補正項。数%しか寄与しないので無視
A,Z：ターゲットの原子量および原子番号
m(e)c^2：電子の質量エネルギー＝511[keV]
I：ターゲットの電離エネルギー
D＝0.3071[MeV･cm^2/g]
ze：入射粒子の電荷[C]
β＝v/c

このとき入射粒子の運動エネルギーEは、入射粒子の質量M[kg]を用いて、全エネルギーから質量エネルギーを引いた式で表わされるから、

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = (Mc)^2 + (\vec{p})^2$$ のアインシュタインの式より、

$$E = \sqrt{(Mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2$$

βについて解くと、 $$\beta^2 = \frac{E(E+2Mc^2)}{(E+Mc^2)^2}$$

代入して、

$$-\frac{dE}{dx} = Dz^2 \frac{Z}{A} \frac{(E+Mc^2)^2}{E(E+2Mc^2)} \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2}{I} \frac{E(E+2Mc^2)}{M^2 c^4} \right) - \frac{E(E+2Mc^2)}{(E+Mc^2)^2} \right]$$

ここで

$$Dz^2 \frac{Z}{A} \equiv \begin{cases} a_H \ldots \text{水素原子の場合} \\ a_C \ldots \text{炭素原子の場合} \end{cases} \qquad \frac{2m_e c^2}{I} \equiv \begin{cases} b_H \ldots \text{水素原子の場合} \\ b_C \ldots \text{炭素原子の場合} \end{cases}$$

$$\frac{E}{Mc^2} \equiv y$$

とおく。(b,yは無次元量、aの次元は[MeV cm^2/g])

水素と炭素の質量比は1/13 , 12/13　だから、合成(ーdE/dx)は、

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{和} = \frac{1}{13}\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{H} + \frac{12}{13}\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{C}$$

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{和} = \frac{(y+1)^2}{y(y+2)}\left\{\frac{1}{13}a_H\left[\ln\left(b_H y(y+2)\right)-\frac{y(y+2)}{(y+1)^2}\right]+\frac{12}{13}a_C\left[\ln\left(b_C y(y+2)\right)-\frac{y(y+2)}{(y+1)^2}\right]\right\}$$

飛程R[cm]は、以下の積分で求まる。

$$R[cm] = \int_0^E \frac{1}{\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{和}[MeV\cdot cm^2/g]\cdot\rho[g/cm^3]}dE$$

$$= \int_0^E \frac{dE}{\rho\frac{(y+1)^2}{y(y+2)}\left\{\frac{1}{13}a_H\left[\ln\left(b_H y(y+2)\right)-\frac{y(y+2)}{(y+1)^2}\right]+\frac{12}{13}a_C\left[\ln\left(b_C y(y+2)\right)-\frac{y(y+2)}{(y+1)^2}\right]\right\}}$$

$$\frac{E}{Mc^2} \equiv y \qquad \text{より} \qquad dE \equiv Mc^2 dy$$

D=0.3071 [MeV cm^2/g]
z=1
Z={1 (水素) , 6 (炭素) }
A={1 (水素) , 12 (炭素) }
m(e)c^2=511×10^3 [eV]
I={13.7 [eV] (水素) ， 11.3 [eV] (炭素) }　　より、

a(H)=0.307 [MeV cm^2/g]
a(C)=0.154 [MeV cm^2/g]
b(H)=7.5×10^4
b(C)=9.0×10^4　と求まる。

さらに、
M(陽子の静止質量)=1.7×10^(-27) [kg]
c=3.0×10^8 [m/s]
ρ=1.03 [g/cm^3]

$$R[cm] = \int_0^{\frac{E[MeV]}{956[MeV]}} \frac{y(y+2)\cdot dy}{2.5\times10^{-5}\times\left[(y+1)^2\ln\left((7.5\times10^4)y(y+2)\right)-y(y+2)\right]+1.5\times10^{-4}\times\left[(y+1)^2\ln\left((9.0\times10^4)y(y+2)\right)-y(y+2)\right]}$$

yをEに直すと

$$a_C}{13}\right)\frac{(E^{'}+Mc^2)^2}{E^{'}(E^{'}+2Mc^2)}\ln\left[E^{'}(E^{'}+2Mc^2)\right]+\left(\frac{a_H}{13}\ln\left[\frac{b_H}{(Mc^2)^2}\right]+\frac{12a_C}{13}\ln\left[\frac{b_C}{(Mc^2)^2}\right]\right)\frac{(E^{'}+M}{E^{'}(E^{'}+$$

$$\frac{a_H}{13}=0.0236[MeV\cdot cm^2/g]$$

$$\rho=1.03[g/cm^3]$$

$$\frac{12a_C}{13}=0.142[MeV\cdot cm^2/g]$$

$$\ln\left[\frac{b_H}{(Mc^2)^2}\right]=-2.47$$

$$\frac{a_H}{13}+\frac{12a_C}{13}=0.166[MeV\cdot cm^2/g]$$

$$\ln\left[\frac{b_C}{(Mc^2)^2}\right]=-2.28$$

$$Mc^2=939[MeV]$$

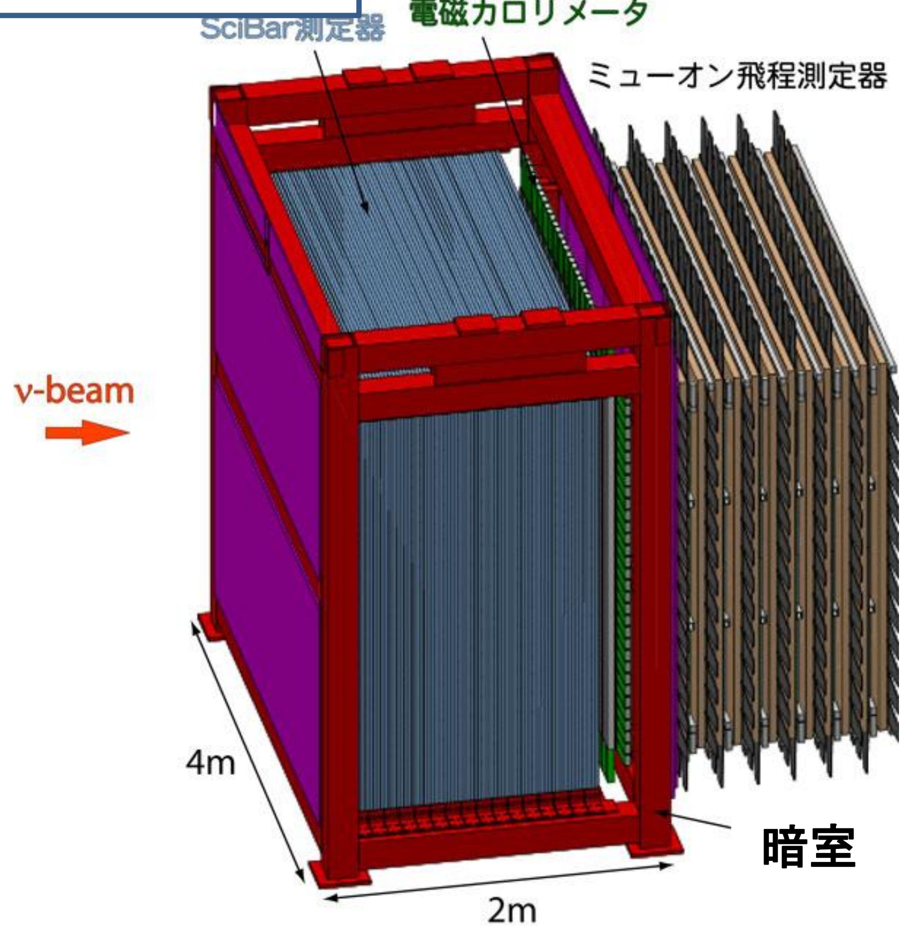
$$cm]=\int_0^{E[MeV]}\left\{0.171\times\frac{(E^{'}+Mc^2)^2}{E^{'}(E^{'}+2Mc^2)}\ln\left[E^{'}(E^{'}+2Mc^2)\right]+0.394\times\frac{(E^{'}+Mc^2)^2}{E^{'}(E^{'}+2Mc^2)}-0.171\right\}$$

第一世代	第二世代	第三世代	電荷	レプトン数
電子ニュートリノ:	μ ニュートリノ:	τ ニュートリノ:	0	+1
電子:	μ 粒子:	τ 粒子:	−1	+1

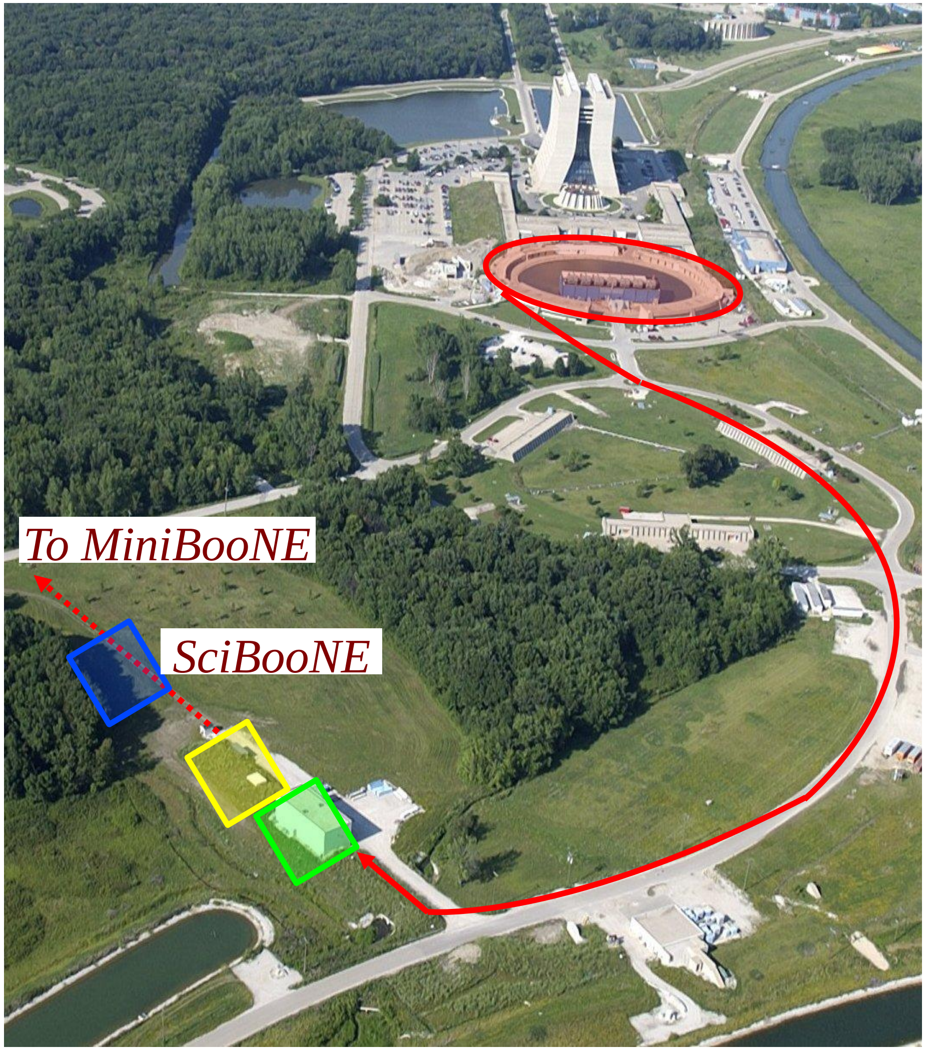
SciBar測定器

電磁カロリメータ

μ飛跡測定器

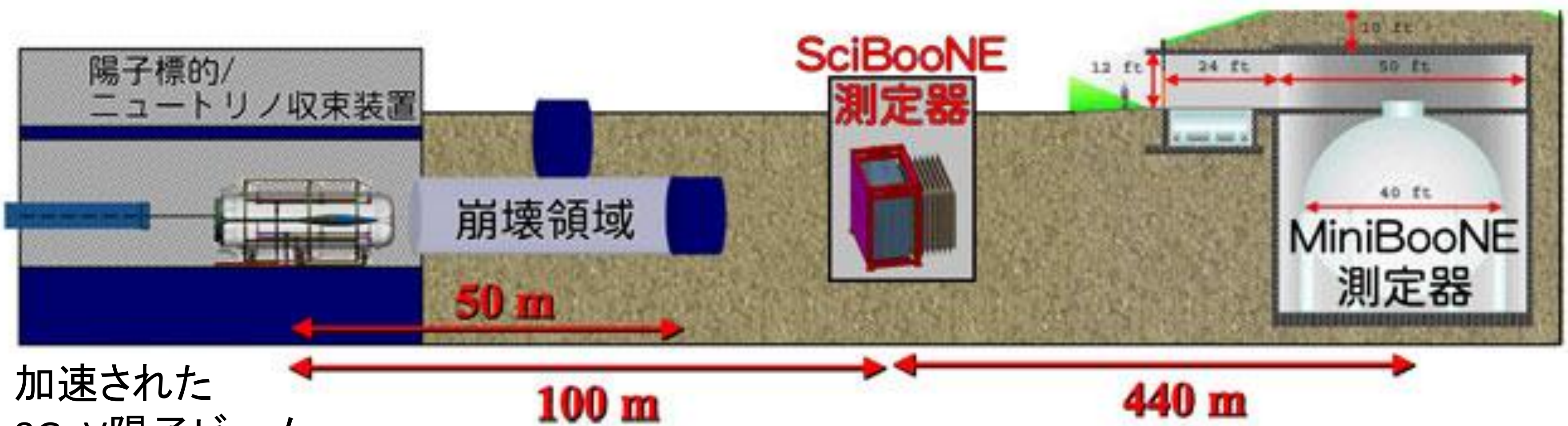


暗室


To MiniBooNE
SciBooNE

2. SciBooNE実験について

SciBooNE実験(SciBar Booster Neutrino Experiment)：
　ニュートリノ(反ニュートリノ)と核子の正確な散乱断面積を測定するために、〇から〇まで、アメリカのイリノイ州にあるFermi Labで行われた実験。現在は実験で得られたデータの解析が行われている。



加速された
8GeV陽子ビーム