

α decay of nucleus and Gamow penetration factor ～原子核のα崩壊とGamowの透過因子～

1. トンネル効果とGamowの透過因子

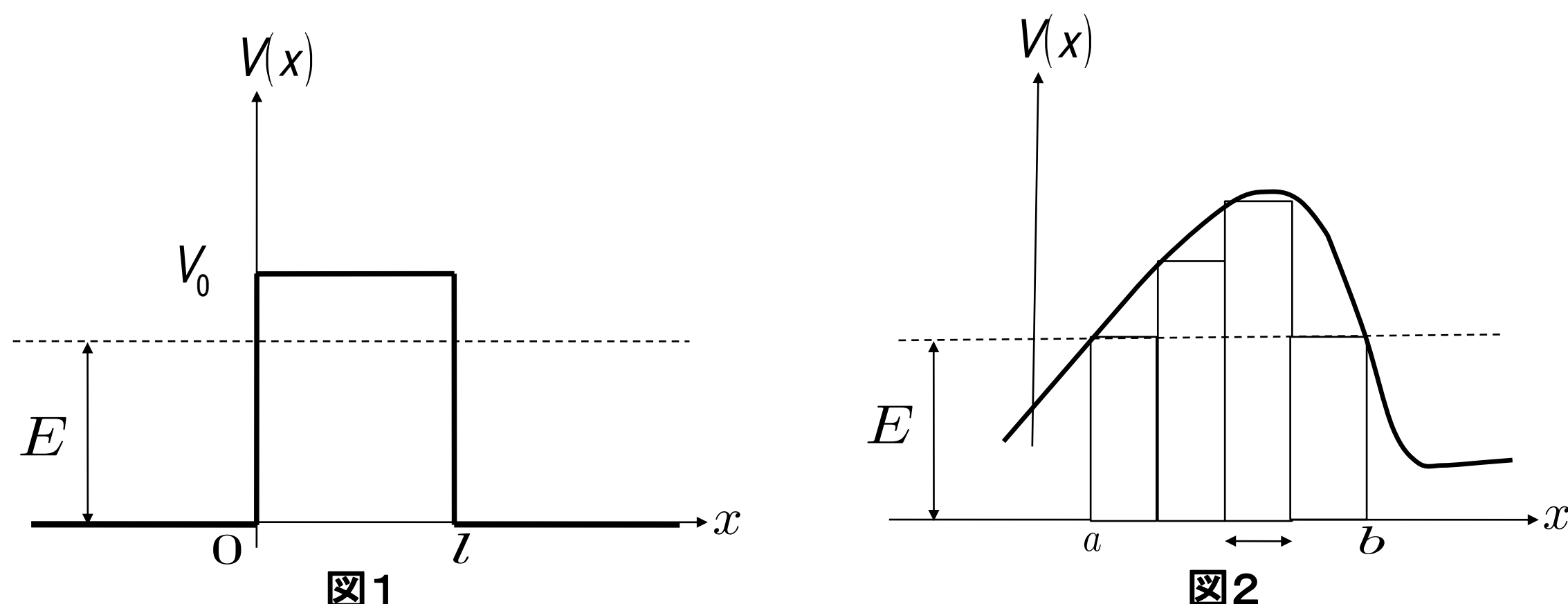
古典力学では粒子はポテンシャル障壁を通り抜けることが出来ないが、量子力学では透過する確率はゼロではない。このような量子力学特有の現象を**トンネル効果**という。

図1のようなポテンシャル障壁では透過確率Pは次のように書ける。

$$P = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \rho l} \quad \text{ただし、} \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

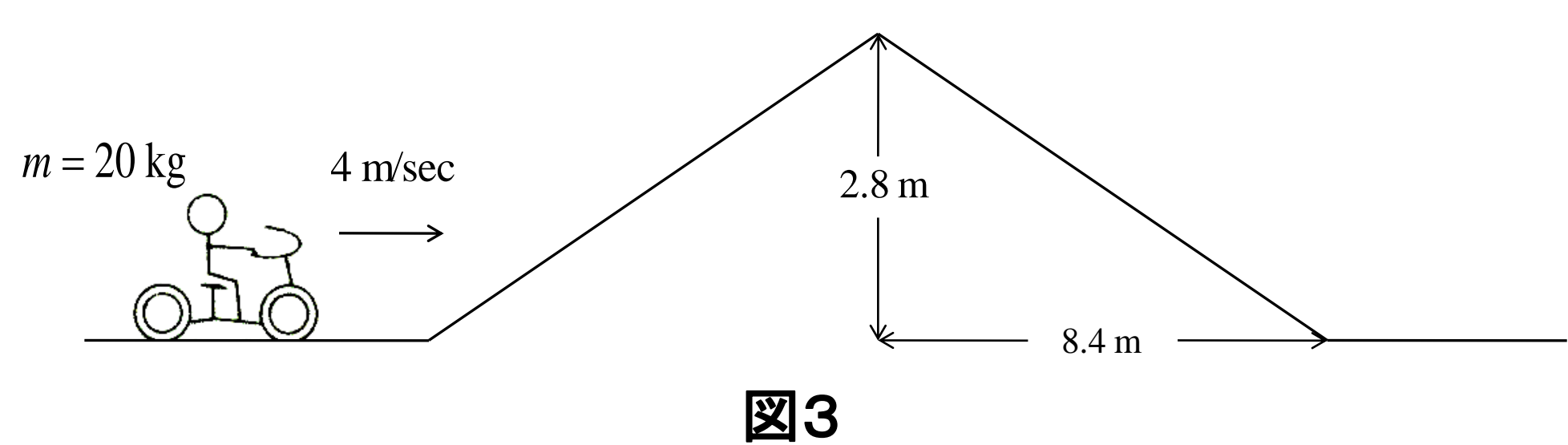
この式を用いて、より一般的な形のポテンシャル障壁の場合の透過確率を近似的に表したものが**Gamowの透過因子**である。

$$P \simeq \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \right]$$



2. マクロな世界におけるトンネル効果

原子や素粒子などミクロな世界を記述する量子力学はマクロな世界にも適用することが出来る。例として図3のような状況を考え、Gamowの透過因子を用いて透過確率を計算してみる。
[参考: Fermi著「原子核物理学」]



$$P \simeq \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \times 2 \int dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \right] = \exp \left[-\frac{4}{\hbar} \int_0^6 dx m \sqrt{\frac{2g}{3} x} \right]$$

$$= \exp(-2 \times 10^{37})$$

$$= 10^{-1.9 \times 10^{36}}$$

このように透過確率は非常に小さい値であることが分かる。しかし、古典論では考えられないようなことでも量子力学では可能なのである。

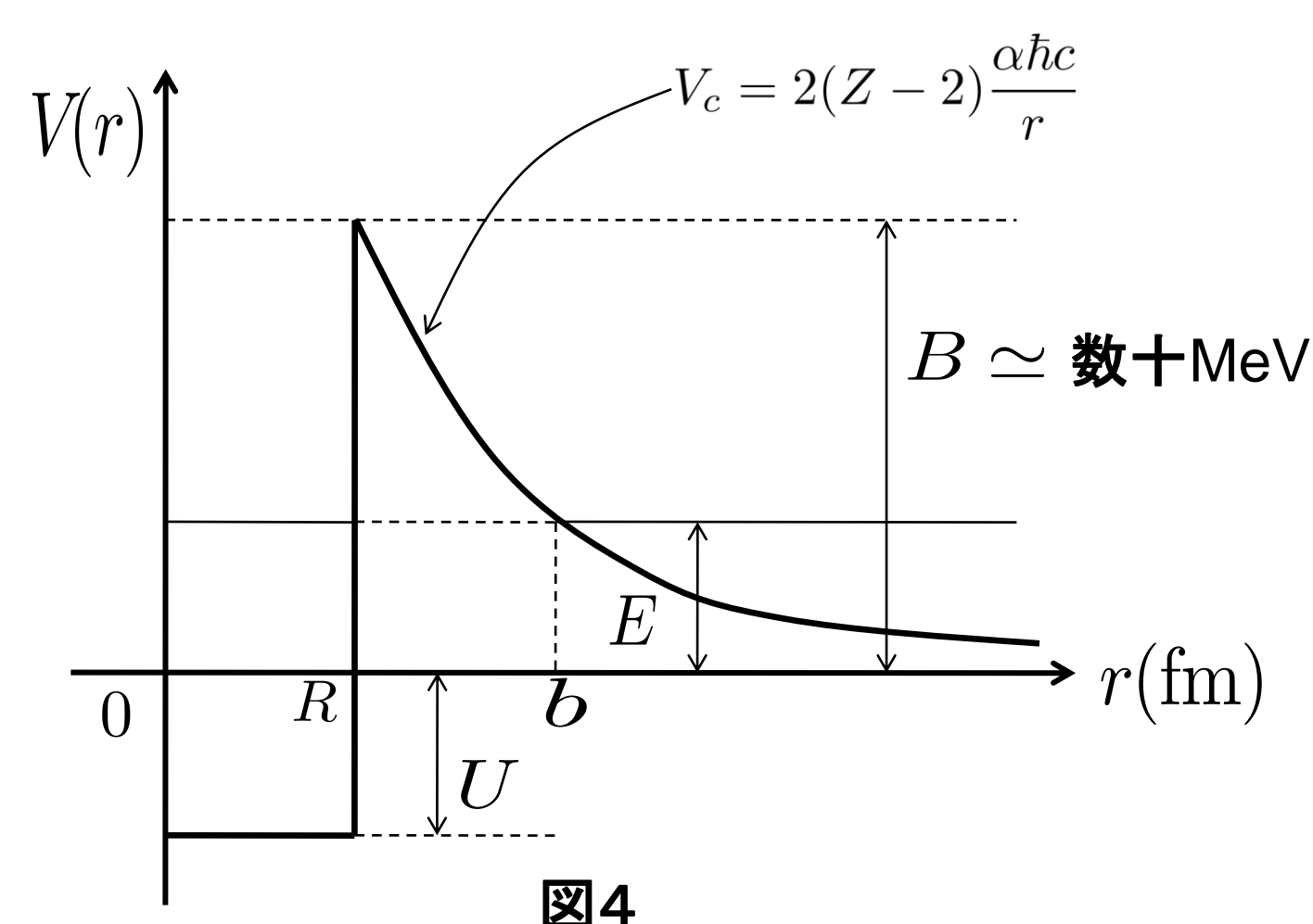
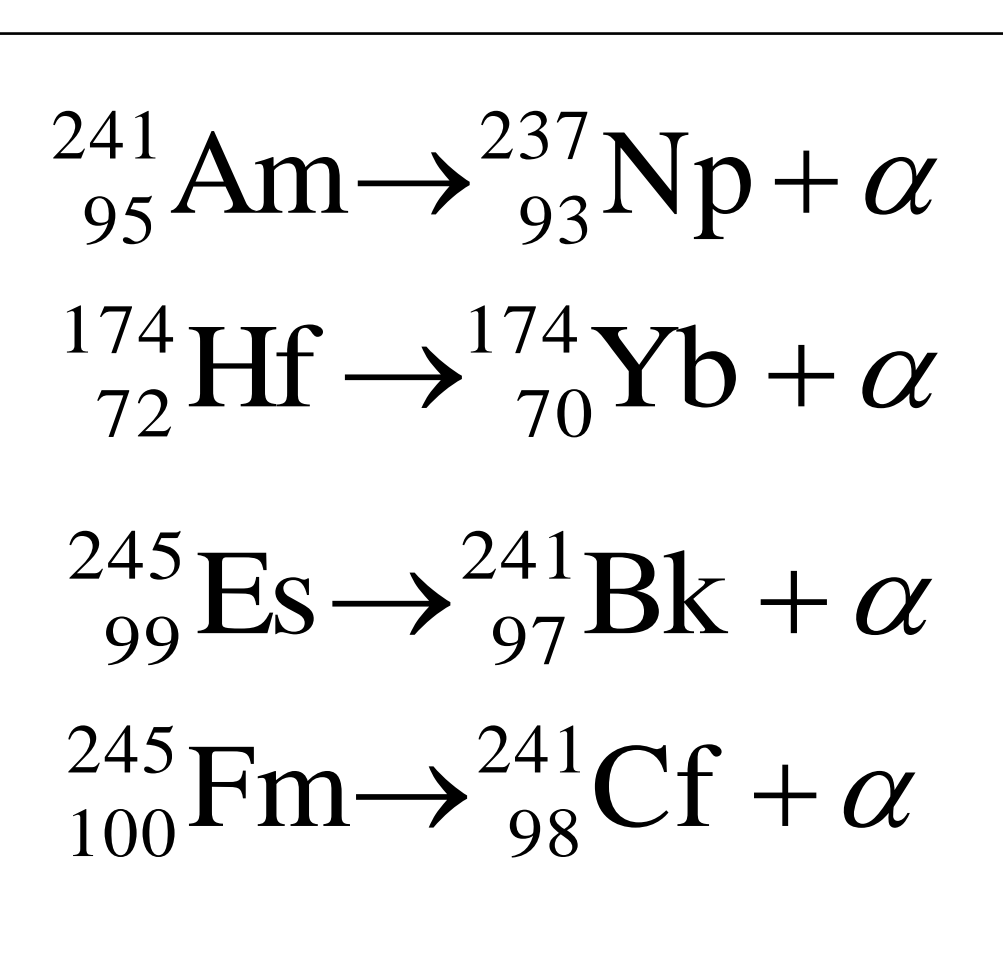
3. α崩壊とは？

原子核の放射壊変の一種。ある原子核がα粒子(He原子核)を放出して、陽子数と中性子数を2つ減らす過程のことをいう。

放出されるα粒子のエネルギーは原子核の作るポテンシャル障壁より低い。

α崩壊はトンネル効果によって説明される。

そこで図4のような簡単なモデルを考え、以下に示した過程の半減期の計算を行う。



4. α崩壊過程における半減期の数値計算

$$\text{崩壊定数 } \lambda = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{2}{m} (B - E)} \frac{E + U}{B + U} \times P$$

核表面にα粒子が現れる単位時間当たりの回数 ポテンシャル障壁の透過確率

W.K.B.法から

$$\text{半減期 } T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda} \quad \text{原子核半径 } R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.48 \text{ fm}$$

原子核の種類	α粒子のエネルギー(MeV)	半減期(実験値)	半減期(理論値)	相対誤差(%)
${}_{95}^{241}\text{Am}$	5.49	432.2 y	147.0 y	66.0
${}_{72}^{174}\text{Hf}$	2.44	2.0×10^{15} y	5.03×10^{16} y	2415.0
${}_{99}^{245}\text{Es}$	7.73	1.1 min	0.19 min	82.7
${}_{100}^{245}\text{Fm}$	8.15	4.2 s	0.98 s	76.7

→ 理論値と実験値との誤差が60%以上となり、一致しなかった。

原因は...

- ・半減期はアルファ粒子のエネルギーに強く依存する。(図5)
- ・原子核半径の値に対しても強く依存している。(図6)

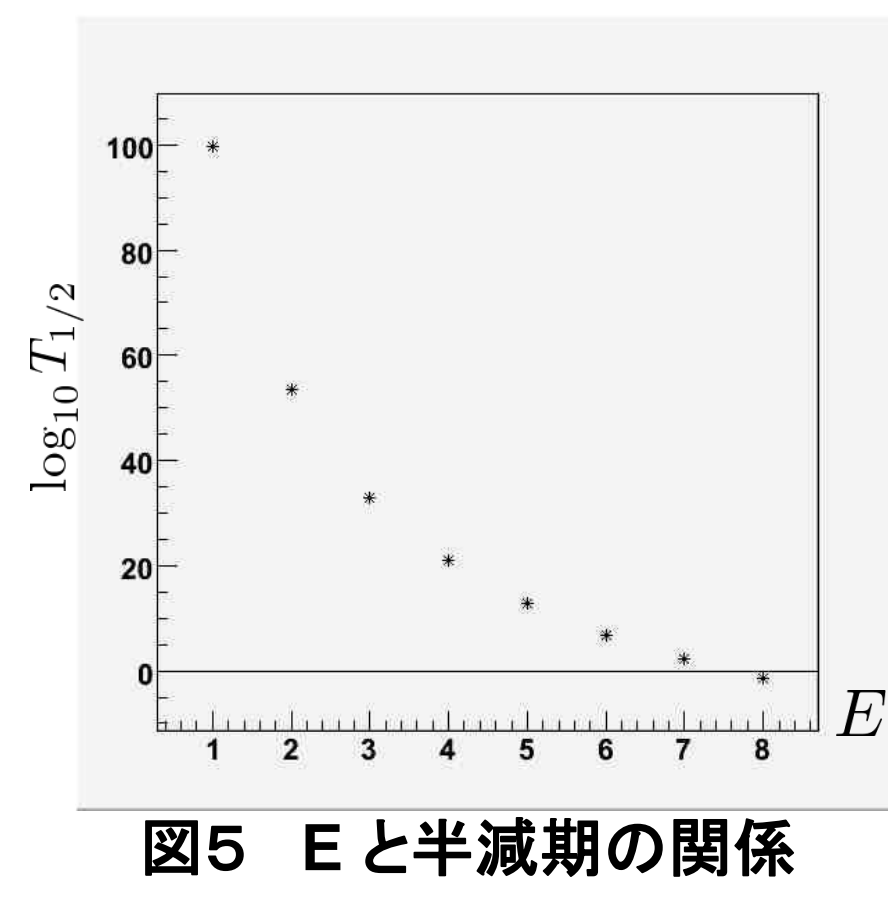


図5 Eと半減期の関係

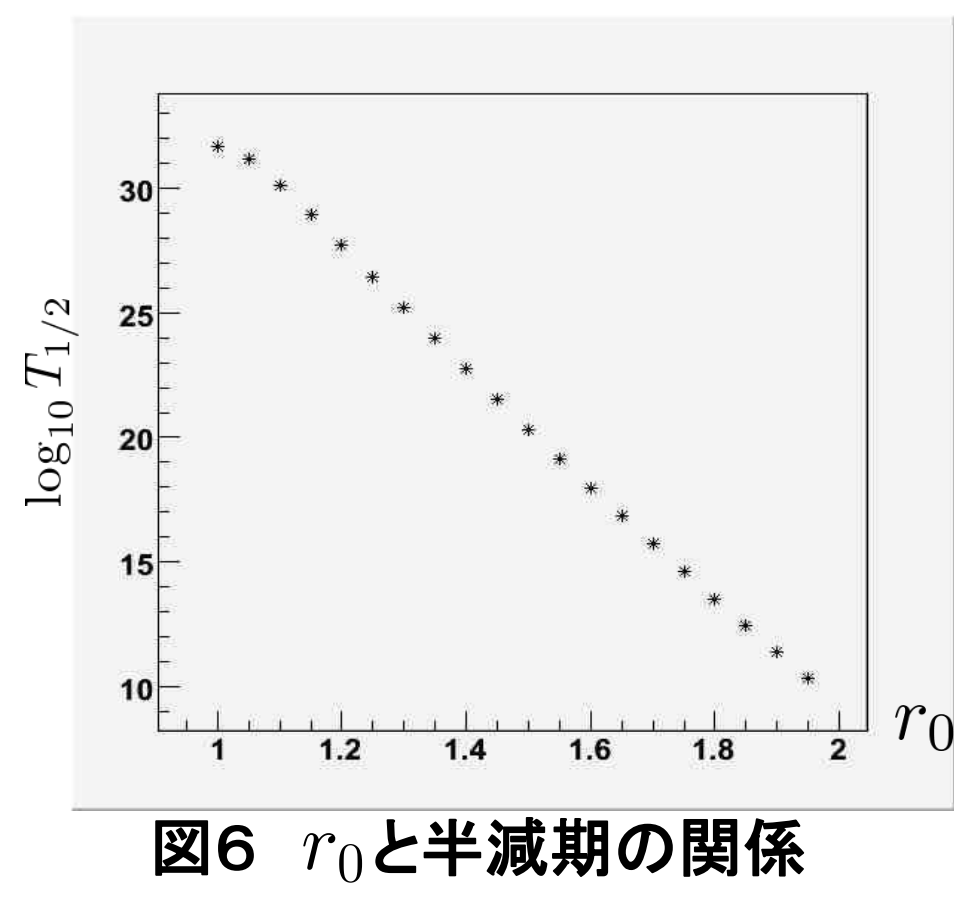


図6 r0と半減期の関係

より厳密なモデルを考えなければならぬ。

角運動量に由来する遠心力ポテンシャル $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$ をCoulombポテンシャルに加えて、計算を行う。

下からl=1,2...の時の遠心力ポテンシャル。これらがCoulombポテンシャルに加わる。

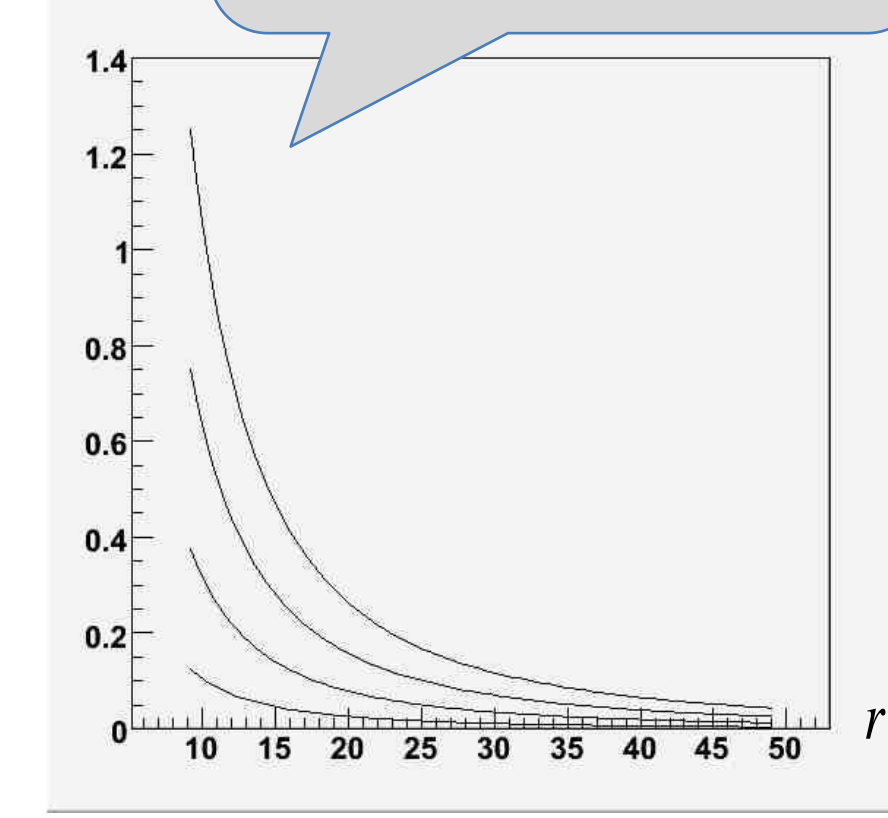


図7 遠心力ポテンシャル

原子核の種類	半減期(実験値)	半減期 l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	相対誤差(%)
${}_{95}^{241}\text{Am}$	432.2 y	147.0 y	173.6 y	242.0 y	397.6 y	768.9 y	8.0
${}_{72}^{174}\text{Hf}$	2.0×10^{15} y	5.03×10^{16} y	6.24×10^{16} y	9.56×10^{16} y	1.81×10^{17} y	4.21×10^{17} y	2415.0
${}_{99}^{245}\text{Es}$	1.1 min	0.19 min	0.22 min	0.31 min	0.49 min	0.90 min	18.2
${}_{100}^{245}\text{Fm}$	4.2 s	0.98 s	1.14 s	1.56 s	2.46 s	4.52 s	7.6

Hfだけが大きく違っている理由として、原子核半径 $R = r_0 A^{1/3}$ が様々な原子核の半径をもとにして得られるモデル化された式であることが挙げられる。

AmやEsなどの原子核半径がこの関係式でよく表される一方で、Hfはある程度のずれをもっていると考えられる。そのため、半減期に大きな影響を及ぼしている可能性がある。

5. まとめ

- ・井戸型+Coulombポテンシャルのみを考えたモデルでは、α崩壊の半減期のおよそのスケールは分かるが、正確には求めることが出来ない。
- ・遠心力ポテンシャルを含めると、理論値は実験値に近づくことが分かった。