

修士論文

クォーク・グルーオンからハドロンへの破  
砕関数の解析と誤差評価

小林 祐輝

平成22年2月7日

## Abstract

The proton has spin one half. In 1960s Deep Inelastic Scattering (DIS) revealed that spin of the proton is composed by 3 valence quark( $uud$ ), which also have spin one half. This fact suggest that spin of proton comes from u and d. However, in 1988 EMC (European Muon Collaboration) experiment found out that quarks in the proton contribute only 20% to compose spin of the proton. This question is called proton spin puzzle.

One of the major way to study spin structure of the proton spin is a high energy lepton scattering experiment. In this experimnt, scattering lepton is not only an object of study, recoil quarksis also subject of study. Though, quarks have a nature of color confinement. Because of this nature, single quark is not detected. Hadrons, which fragment from quarks are only detected. Hence, it is necessary to correspond quarks and hadrons, which detected in experiments. For this purpose Fragmentation Functions(FFs) are introduced. FF is a probability to find hadrons in fraction with a ratio of hadron momentum to quark and gluon (they are called parton) momentum.

To calculate FFs Quantum Chromodynamics (QCD) are used. This calculation method are analogy of Parton Distribution Function(PDF), which is a distribution that express distribution of parton momentum.

In this research, I analyzed in Global QCD framework, it's based on perturbative QCD(pQCD). Global QCD is a framework In Global analysis, because it cover many experiments and have many parameters to fit, estimation of error are important. I analyze FFs and estimate its error in Semi-inclusive DIS and Inclusive Hadron Production in  $e^+e^-$  Collision data.

## 要旨

陽子はスピン  $1/2$  を持っている。1960年代に深非弾性散乱によって陽子がそれぞれスピン  $1/2$  を持つ3つの価クォーク ( $u u d$ ) からできていることが明らかになると、陽子のスピンは素朴に  $u$  クォークが全体の  $+2/3$  を  $d$  クォークが  $-1/6$  の寄与を与え、合わせて  $1/2$  のスピンが構成されると考えられた。しかし、1988年 CERN で行われた EMC (European Muon Collaboration) 実験によって、陽子中のクォークは陽子スピンの約 20% を構成するに過ぎないことが報告された。この問題は陽子スピンの謎と呼ばれ、現在解決を待たれる問題である。

核子のスピン構造を研究する代表的な方法は高エネルギーのレプトン散乱実験である。散乱されたレプトンのみならず反跳クォークも研究するのだが、クォークには色の閉じ込めという性質があるため、単体のクォークを測定することはできず、実験ではクォークがハドロンへと崩壊した後のハドロンを測定する。そのためにはクォークと実験で観測されるハドロンの対応づけを行う必要があり、そこで破砕関数 (Fragmentation Function; FF) を導入する。破砕関数とは、クォークやグルーオン (まとめてパートンと呼ばれる) がハドロン化したときにパートンに対して運動量比  $z$  を持ったハドロンを破砕群中に見いだす確率である。

破砕関数の計算には量子色力学 (Quantum Chromodynamics ; QCD) が使われ、その計算手法はパートンの運動量分布を表す分布関数、パートン分布関数 (Parton Distribution Function; PDF) との類推で説明される。

本研究では摂動論的 QCD (pQCD) に基づいた総合的な枠組み、グローバル QCD で解析を行った。これはパートン分布関数、破砕関数の一般性に基づき、包括的な立場で高エネルギー過程を扱う枠組みである。総合解析では多くの実験を扱い、決定すべきパラメータも多い事から、誤差の評価が重要である。本研究では準包括的深比弾性散乱および電子-陽電子対消滅の実験データを用いて破砕関数の解析および誤差の評価を行った。

# 目次

第1章 序論	3
第2章 破砕関数解析のための物理的基礎	5
2.1 パarton模型	5
2.1.1 構造関数	5
2.1.2 ブジョルケン・スケーリング	7
2.1.3 パarton模型	7
2.2 ハドロ化	10
2.2.1 カラーの閉じ込め	11
2.2.2 ジェット現象	13
2.2.3 破砕関数の性質	15
2.3 QCD 補正	16
2.3.1 パarton分布関数	16
2.3.2 DGLAP 方程式	21
2.4 因子化	23
2.5 高エネルギー過程	23
2.5.1 深非弾性散乱	23
2.5.2 準包括的深非弾性散乱	24
2.5.3 電子-陽電子対消滅	26
第3章 解析手法	29
3.1 Mellin 変換	29
3.2 パラメタリゼーション	30
3.2.1 $\pi$ 中間子の破砕関数	32
3.2.2 $K$ 中間子の破砕関数	32
3.2.3 重いクォークの扱い	32
3.3 解析データの選択	33
3.3.1 電子・陽電子対消滅	33
3.3.2 準包括的深非弾性散乱	35
3.4 誤差評価	35

3.4.1	最尤性原理	35
3.4.2	$\chi^2$ 検定	37
3.4.3	誤差の扱い	39
3.4.4	Hessian 法	40
3.4.5	ラグランジの未定乗数法	43
3.4.6	許容変位	45
3.5	解析手順	46
<b>第 4 章</b>	<b>解析結果</b>	<b>49</b>
4.1	破碎関数	49
4.1.1	$\pi$ 中間子の破碎関数	49
4.2	誤差の評価	51
4.2.1	$\pi$ 中間子の破碎関数	51
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>53</b>
<b>付録 A</b>	<b>分割関数</b>	<b>54</b>
A.1	非偏極空間様分割関数	54
A.2	非偏極時間様分割関数	55
<b>付録 B</b>	<b>係数関数</b>	<b>56</b>
B.1	深非弾性散乱	56
B.2	準深非弾性散乱	57
B.3	電子・陽電子対消滅	58

# 第1章 序論

陽子のスピンは $1/2$ である。このことは1920年代に行われた水素の比熱を測定する実験によって示された。1960年代に深非弾性散乱実験によって陽子がスピン $1/2$ を持つ3つの価クォークからできていることが明らかになると、陽子のスピンは素朴に、価クォークのうち $u$ クォークが全体の $+2/3$ を $d$ クォークが全体の $-1/6$ の寄与を与え、合わせて $1/2$ のスピンの構成されていると考えられた。

$$|p \uparrow\rangle = |u \uparrow\rangle|u \uparrow\rangle|d \downarrow\rangle \quad (1.1)$$

しかし、1988年CERNで行われたEMC (European Muon Collaboration) 実験によって、陽子中のクォークは陽子スピンの約20%を構成するにすぎないことが報告された[1]。この問題は陽子スピン問題 (proton spin puzzle) と呼ばれている。その後、陽子スピンについてはSMC (Spin Muon Collaboration), SLAC (Stanford Linear Accelerator Center)[2], HERMES などの実験が行われ、現在では陽子スピンに対するクォークスピンの寄与は20~30%と考えられている。

核子のスピンは次のように書き表される。

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Delta\Sigma + \Delta G + L \quad (1.2)$$

(1.2)式において、 $\frac{1}{2}\Delta\Sigma (= \frac{1}{2}(\Delta u + \Delta\bar{u} + \Delta d + \Delta\bar{d} + \Delta s + \Delta\bar{s}))$ はクォークスピンによる寄与、 $\Delta G$ はグルーオンスピンによる寄与、 $L$ はクォークとグルーオンの軌道角運動量による寄与を表す。今後陽子スピンを研究する上で、 $\Delta G$ と $L$ を測定することが重要になってくる。

核子のスピンを研究する代表的な方法は高エネルギーのレプトン散乱実験である。レプトンとしては電子やミュオンが最もよく使われる。散乱されたレプトンのみならず反跳クォークも研究するのだが、クォークには色の閉じ込めという性質があるため単体のクォークを測定することはできず、実験ではクォークがハドロンへと崩壊した後のハドロンを測定する。そのためにはクォークと実際に測定されるハドロンの対応づけを行う必要があり、そのために破砕関数 (Fragmentation Function; FF) を導入する。破砕関数とは、クォークやグルーオン (まとめてパートンと呼ばれる。) がハドロン化したときにパートンに対して運動量比 $z$ を持ったハドロンをパートンの破砕群中に見出す確率である。

破砕関数はハドロン中でのパートンの運動量分布を表す分布関数、パートン分布関数 (Parton Distribution Function; PDF) との類推で説明される。

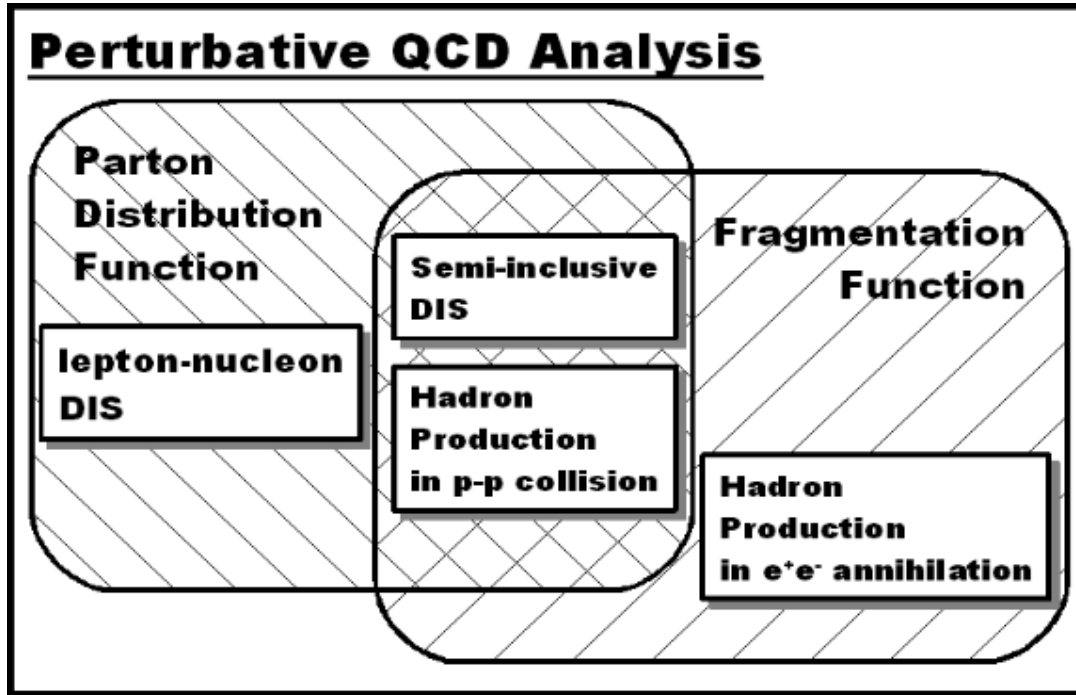


図 1.1: グローバル QCD 解析

本研究では摂動論的 QCD に基づいた総合的な枠組み (グローバル QCD) で解析を行った。これは、パートン分布関数、破砕関数の一般性に基づき、包括的な立場で高エネルギー過程を扱う枠組みである。図 1.1 に本研究で用いた枠組みのなかで扱うことができる高エネルギー過程と分布関数の関係をまとめる。

グローバル解析による破砕関数の先行研究には Kretzer[3] や DSS[4] 今津さんがあるが、グローバル解析では誤差の扱いが重要になってくることが [5][6] により指摘されている。本研究では FF の解析および誤差評価を行った。

本論文は以下のような構成になっている。

2 章では破砕関数を解析するための物理を説明する。まずパートン模型とは何かを述べ、パートン分布関数、破砕関数の 2 つの分布関数について述べる。そして、これらの分布関数から高エネルギー過程がどのように表現されるのかを概観する。

3 章では破砕関数解析の枠組み及び誤差の取扱いについて述べる。QCD の発展方程式を計算する際、本解析では計算速度を向上させるために Mellin 変換を採用した。Mellin 変換の基礎を述べた後、本研究の主題である誤差解析の手法について説明する。

4 章では解析結果を述べる。

5 章はまとめを述べる。

## 第2章 破砕関数解析のための物理的基礎

本章では、パートン模型とはなにか、パートン分布関数、破砕関数について説明する。そして、破砕関数、パートン分布関数によってどのように高エネルギー過程が説明されるかを概観する。

### 2.1 パートン模型

核子の内部構造を説明する手段として、パートン模型が提案された。パートン模型では電磁気力のみを考えているため、強い相互作用の効果を考えたときには修正しなければならない。しかし、核子の内部構造を記述するための物理的基礎を与える。

この節では電子・陽子の深非弾性散乱を例に取り、パートン模型およびパートン分布関数を説明する。

#### 2.1.1 構造関数

核子の内部構造を調べるには、性質がわかっており、核子より小さく、核子の奥深くまで入っていけるレプトンを探索子 (Probe; プローブ) に使うのが有効である。そこで、電子・陽子の非弾性散乱

$$e(k) + p(p) \rightarrow e'(k') + X \quad (2.1)$$

を考える (図 2.1)。深非弾性散乱では散乱された電子  $e'$  のみを測定し、式 (2.1) 中の  $X$  はそれ以外の測定されない粒子を表す。以降の議論で出てくる変数については、表 2.1 にまとめた。

この反応の微分散乱断面積は、

$$d\sigma = \frac{(4\pi\alpha)^2}{4(kp)} L_{\mu\nu} \frac{1}{Q^4} 4\pi M W^{\mu\nu} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \quad (2.2)$$

で記述される。ここで  $\alpha = 1/137$  は微細構造定数、 $L_{\mu\nu}$  はレプトン・テンソル、 $W^{\mu\nu}$  はハ



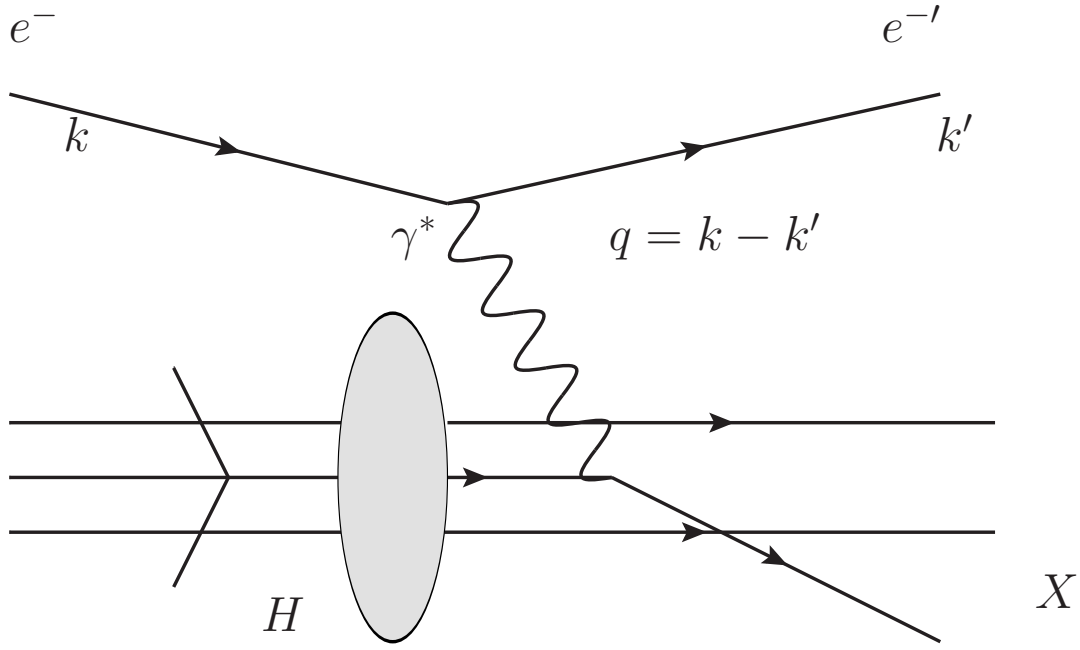


図 2.1: 深非弾性散乱

ドロン・テンソルで、それぞれ

$$L_{\mu\nu} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (q^2/2)g_{\mu\nu}] \quad (2.3)$$

$$W^{\mu\nu} \equiv \frac{(2\pi)^4}{4\pi M} \sum_{\text{spin}} \delta^4(p + q - P_F) \left[ \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} J_p^\mu J_p^{\mu*} \right] \quad (2.4)$$

である。 $J_p^\mu$  は電子の運動によって励起される電流である。 $W^{\mu\nu}$  から  $W_1, W_2$  を

$$W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1(Q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} \left( p^\mu - \frac{(pq)q^\mu}{q^2} \right) \left( p^\nu - \frac{(pq)q^\nu}{q^2} \right) W_2(Q^2, \nu) \quad (2.5)$$

と定義すれば、(2.2) は次のように書くことができる。

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega'} = \sigma_M [W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2(\theta/2)] \quad (2.6)$$

$$\sigma_M = \frac{4\alpha^2}{Q^4} \omega'^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.7)$$

$\sigma_M$  はモットの散乱断面積で、ラザフォード散乱に相対論効果、電子のスピン効果を加えたものである。 $W_1, W_2$  は構造関数と呼ばれる量で弾性散乱の場合の形状因子に相当する。

## 2.1.2 ブジョルケン・スケーリング

構造関数は表 2.1 に示す遷移運動量  $Q^2$  仮想光子のエネルギー  $\nu$  の 2 変数に依存するが、

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \infty, Q^2 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty \\ 0 < x = \frac{Q^2}{2M\nu} < 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

という条件が成り立つときには、 $Q^2$  と  $\nu$  の 2 変数に独立に依存するのではなく、比  $x$  のみの関数となる。この  $x$  のことをブジョルケン  $x$ [7] と呼ぶ。すなわち式 (2.5) で定義した構造関数は

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x), \quad MW_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x) \quad (2.9)$$

の形でかける。この現象のことをブジョルケン・スケーリングと呼び、ブジョルケン・スケーリングが成り立つ非弾性散乱のことを深非弾性散乱と呼ぶ。実験データによればブジョルケン・スケーリングは  $Q > 1$  GeV で成立している (図 2.2)。

## 2.1.3 パarton 模型

parton は、核子の中に存在する点状の粒子としてファインマンとブジョルケンによって導入された。今日では parton は電荷を持つ parton であるクォークと電氣的に中性な parton であるグルーオンであることがわかっている。エネルギーが十分大きく、parton の質量、横方向の運動量が無視できる場合、ハドロンを parton の複合体と見なし、ハドロンの反応率は個々の parton の反応に依る和であると考えるのが parton 模型である。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_i \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_i \quad (2.10)$$

$k = (\omega, \mathbf{k})$	散乱前の電子の 4 元運動量
$p \stackrel{\text{LAB}}{=} (M, \mathbf{0})$	散乱前の陽子の 4 元運動量
$k' = (\omega', \mathbf{k}')$	散乱後の電子の 4 元運動量
$\theta$	電子の散乱角 (実験室系)
$\nu = \frac{p \cdot q}{M} \stackrel{\text{LAB}}{=} \omega - \omega'$	仮想光子のエネルギー
$q = (\nu, \mathbf{q}) = (k - k')$	仮想光子の 4 元運動量
$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 \stackrel{\text{LAB}}{=} 4\omega\omega' \sin^2 \theta / 2$	遷移運動量
$M$	陽子の質量

表 2.1: 深非弾性散乱の運動学的変数

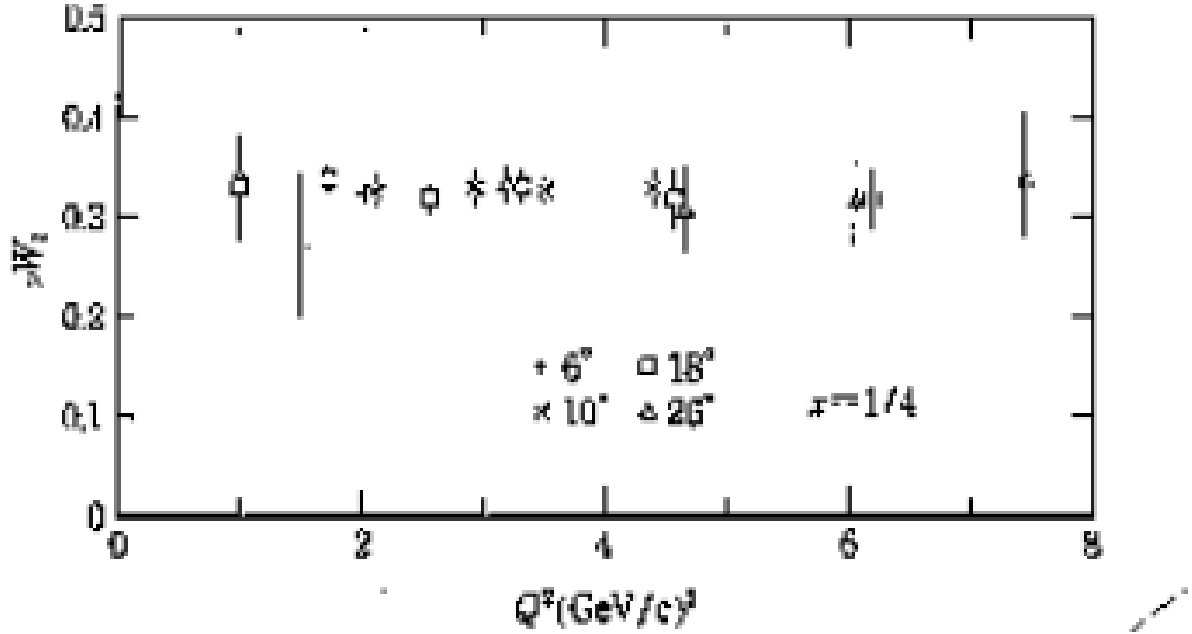


図 2.2:  $\nu W_2(\nu, Q^2)$  は  $Q^2$  の関数として一定であり、 $x = Q^2/2M\nu$  のみの関数となる。図は  $W > 2\text{GeV}$  のデータを集めている。[8]

(2.10) が成り立つ近似のことをインパルス近似と呼ぶ。インパルス近似とは個々のパートン反応が他のパートンの反応に影響しないとして無視することである。

インパルス近似が成り立つためには個々のパートン散乱は他のパートンに影響を及ぼしてはいけないので、パートンと電子が相互作用する時間  $\tau_{\text{int}}$  はパートンが自由でいられる時間  $\tau_{\text{free}}$  にくらべ十分短い必要がある。

$$\tau_{\text{int}} \ll \tau_{\text{free}} \quad (2.11)$$

パートンが自由でいられる時間は束縛エネルギー  $\Delta E$  の逆数の程度だと考えられる。

$$\tau_{\text{free}} \simeq \frac{1}{\Delta E} \quad (2.12)$$

束縛エネルギー  $\Delta E$  は核子の質量の程度 ( $\sim M$ ) だと考えられるので、

$$\tau_{\text{free}} \sim \frac{1}{M} \quad (2.13)$$

である。次に、反応時間  $\tau_{\text{int}}$  を考える。電子から見たとき、核子は高エネルギーで走っているため、ローレンツ収縮により、本来のサイズ ( $\sim 1/m_\pi$ ;  $m_\pi$  は  $\pi$  中間子の質量) に比べ  $1/\gamma \sim M/E$  だけ縮んで見えるので、反応時間  $\tau_{\text{int}}$  は

$$\tau_{\text{int}} \sim \frac{1}{m_\pi} \frac{M}{E} \quad (2.14)$$

したがって (2.11) より、

$$E \gg \frac{M^2}{m_\pi} \quad (2.15)$$

である。  $m_\pi$  は核子の質量に比べて十分小さいので、上の関係は、

$$E \gg M \quad (2.16)$$

となる。

陽子が持つ運動量  $p$  に対し、パートンの運動量  $P$  がどれだけの運動量の寄与を持つかを表す量として  $\xi$  を定義する。つまり、

$$P = \xi p \quad (2.17)$$

この時、陽子の中のパートンの横方向の運動量は無視することにする。その定義により  $\xi$  には

$$0 < \xi < 1 \quad (2.18)$$

という条件がつく。パートンの質量を  $m_q$  としたとき、パートンによる電子の散乱に際して次の関係が成り立つ。

$$(\xi p + q)^2 = m_q^2 \quad (2.19)$$

この方程式を  $\xi$  について解き、  $m_q$  を無視すると、

$$\xi = \frac{Q^2/2M\nu}{1 + M^2/Q^2 (Q^2/2M\nu)^2} \quad (2.20)$$

が求められる。ここで、条件

$$Q^2 \gg M^2 \quad (2.21)$$

が成り立つならば、

$$\xi \simeq x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (2.22)$$

となり、ブジョルケン  $x$  の定義と同じになる。また、  $\xi$  の定義より、

$$0 < \xi \simeq x = \frac{Q^2}{2M\nu} < 1 \quad (2.23)$$

である。また、 (2.21), (2.23) により  $2M\nu$  には、

$$2M\nu \gg M^2 \quad (2.24)$$

の制限がかかる。(2.16),(2.21),(2.24),(2.23) より、インパルス近似が成立する条件は

$$E \gg M, \quad Q^2 \gg M^2, \quad 2M\nu \gg M^2$$

$$0 < x = \frac{Q^2}{2M\nu} < 1 \quad (2.25)$$

が成立するときである。これはブジョルケン・スケーリングが成立する条件 (2.8) と同じである。

新しく次の変数を導入する。

$$s = (k + p)^2 \simeq 2k \cdot p = 2\omega M \quad \text{:実験室系} \quad (2.26)$$

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{\nu}{\omega} = \frac{2M\nu}{s} \quad \text{:実験室系} \quad (2.27)$$

(2.22),(2.26),(2.27),(2.9) を用いて (2.2) を書き換えると

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha}{Q^4} s[(1-y)F_2(x) + 2xF_1(x)(y^2/2)] \quad (2.28)$$

一方、陽子の中のパートンが運動量比  $x$  を持つ確率を表す関数  $q(x)$  を導入する。 $q(x)$  をパートン分布関数という。パートン分布関数を使って、散乱断面積を表すと、

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} s[(1-y) + (y^2/2)] \sum_i \lambda_i^2 x q(x) \quad (2.29)$$

ここで  $\lambda_i$  は各パートンの電荷である。(2.28),(2.29) から以下の関係を得る。

$$F_1(x) = 1/2 \sum \lambda_i^2 q(x) \quad (2.30)$$

$$F_2(x) = x \sum \lambda_i^2 q(x) \quad (2.31)$$

上の関係は  $F_i$  にパートンの核子内での運動量分布という物理的意味づけを与えるとともに、次の関係も導く。

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (2.32)$$

(2.32) はカラングロスの公式 [9] と呼ばれる。測定精度の範囲内でこの関係は確認されており、パートンがスピン 1/2 を持つことが確認されている。

## 2.2 ハドロン化

核子の内部構造を探る方法は散乱電子を測定する方法だけに限らない。クォークの反跳によって生成されるハドロンを測定する方法もある。しかし、カラーの閉じ込めによ

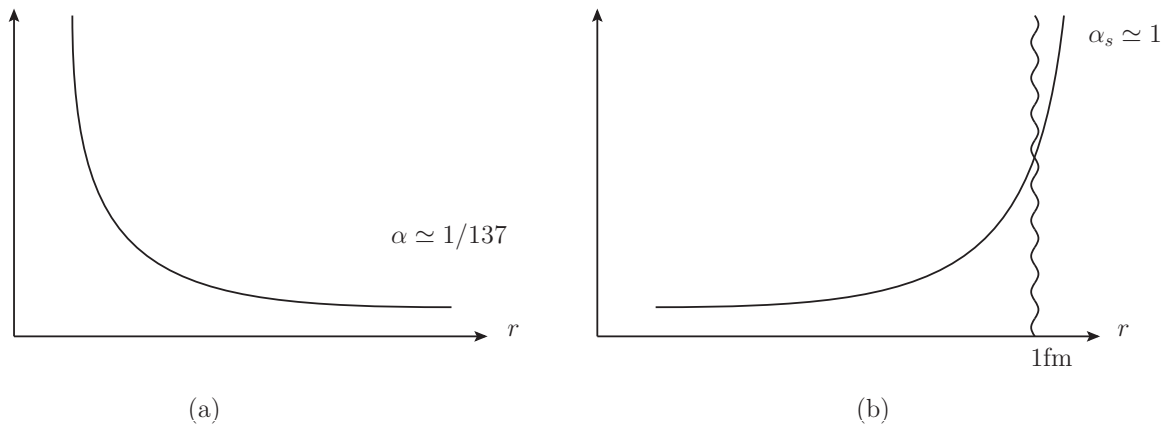


図 2.3: 場の量子論における遮蔽効果 (a)QED (b)QCD

リクォークを単体で観測することは不可能で、観測できるのはクォークが崩壊した後のハドロンだけである。したがって、理論結果を実験で検証するには、QCD 計算で取り扱うパートン (クォーク・グルーオン) とハドロンとの対応をつける必要がある。そのために、パートン分布関数との類推により導かれる破砕関数を導入する。

この節の前半ではジェット現象を題材にパートンとハドロンの関係を考え、破砕関数を導く。後半では破砕関数の性質について述べる。

### 2.2.1 カラーの閉じ込め

クォークは R, G, B 三種類のカラー荷を持つ。QCD によれば実験的に観測されるのはそれぞれのカラーが混じり合って無色の状態を作る場合のみである。つまり、

- 3種のクォークがそれぞれ R, G, B のカラー荷を持ち、無色の状態をつくる場合 (eg:  $p = (RGB)$ )
- 3種の反クォークがそれぞれ  $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$  のカラー荷を持ち、無色の状態をつくる場合 (eg:  $\bar{p} = (\bar{R}\bar{G}\bar{B})$ )
- R と  $\bar{R}$  のように 2種のクォークがあるカラーとその補色の組を成し無色となる場合 (eg:  $\pi = (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$ )

だけが観測される。したがって、自由クォークを観測することはできない。この現象をカラーの閉じ込めと呼ぶ。クォークがこの様に振る舞うのはカラー荷を媒介するグルーオンが、それ自身カラー荷を持つため別のグルーオンと直接相互作用することができるからである。図 2.3 に QCD と QED での遮蔽効果の違いを図示する。

グルーオンが別のグルーオンと相互作用すると、クォーク・反クォークのカラー場が作る力線は図 2.4(a) のように、管状に絞られる。これは力線が妨げられずに広がっていく

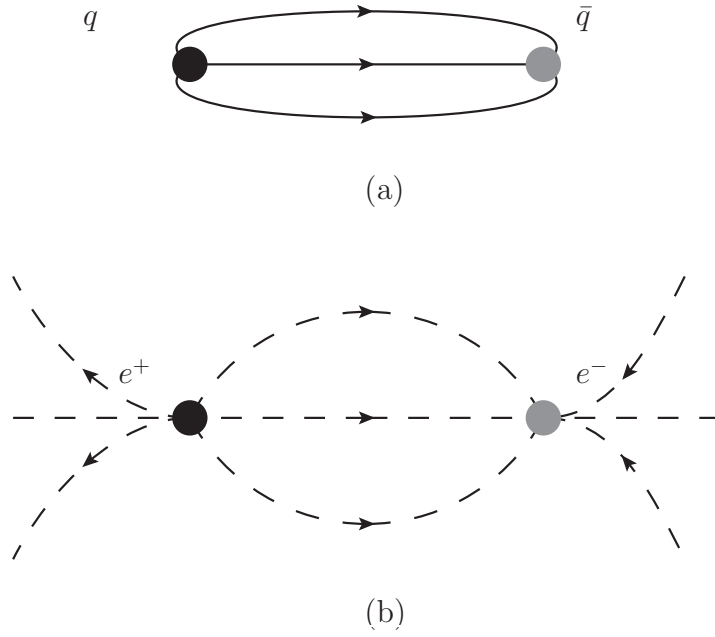


図 2.4: (a) ポテンシャル  $V(r) \sim r$  を持つ  $q\bar{q}$  カラー場 (b) ポテンシャル  $V(r) \sim 1/r$  のクーロン場

クーロン場とは対照的である (図 2.4(b))。光子は自分自身を閉じ込めるような自己結合をしない。カラー管が単位長さあたり一定のエネルギー密度を持っているなら、クォーク・反クォーク間のポテンシャルエネルギーは距離  $V(r) \sim \lambda r$  のように増加する。したがって、クォーク (及びグルーオン) は決して逃げられない。この現象、赤外束縛はクォークを無色のハドロン内に閉じ込める原因であると考えられている。

図 2.3 はカラーの閉じ込めの他にも QCD の特徴的な性質を表している。それは短距離では結合定数  $\alpha_s$  が非常に小さくなり、クォークが相互作用しない自由粒子のように振る舞う性質、即ち漸近的自由性である。結合定数は摂動の 2 次の精度で、

$$\alpha_s = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \left[ 1 - \frac{\beta_1 \ln\{\ln(Q^2/\Lambda^2)\}}{\beta_0^2 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \right] \quad (2.33)$$

と表される。ここで、定数  $\beta_0, \beta_1$  は

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{11}{3}N_c - \frac{4}{3}T_R n_f \\ \beta_1 &= \frac{34}{3}N_c^2 - \frac{10}{3}N_c n_f - 2C_F n_f \end{aligned} \quad (2.34)$$

で与えられ、 $N_c = 3$  はカラーの数を表し、 $T_R = 1/2$ ,  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$  である。 $\alpha_s$  は  $Q^2 \rightarrow \infty$  で 0 に近づく。参照点は通常 Z ボソンの質量  $M_Z = 91.1876 \text{ GeV}^2$  が使われる。本解析でも Z ボソンの質量を基準にして、 $\alpha_s(M_Z) = 0.1176$  を採用した。

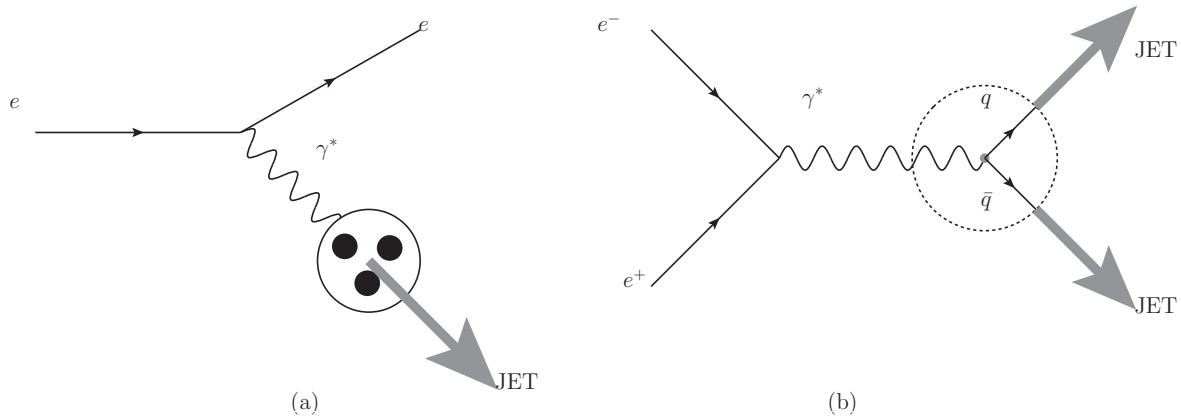


図 2.5: ジェット現象

- (a) 陽子-電子散乱によるジェットの生成
- (b) 電子-陽電子消滅によるジェットの生成

この漸近的自由性はエネルギーが高い領域では摂動計算が使える根拠であり、前節のパートンモデルでインパルス近似を導入した際、パートン同士を相互作用のない自由粒子として扱ったことの根拠である。

## 2.2.2 ジェット現象

カラーの閉じ込めは自由クォークが観測できない理由を説明するだけでなくジェットというユニークな現象も予言する。図 2.5(b) に示したように、電子-陽電子消滅で仮想光子が作られ、クォーク・反クォークは、運動量保存によって、重心系では互いに反対方向に飛び出す。 $q\bar{q}$  対の距離が大きくなり、カラー力線がのびるとポテンシャルエネルギーが充分増加して、新しい  $q\bar{q}$  が生成できるようになる。これはカラー力線の端の点で起こる。カラー力線は、余分に  $q\bar{q}$  の質量を作りつつ、より低いエネルギーを持つ 2 つの短い管に切れていく。出ていくクォークと反クォークはさらに、反対方向に運動を続け、力線をのばす。クォーク・反クォークの運動エネルギーがクォークとグルーオンの生成に使われて最終的にはなくなるまで、 $q\bar{q}$  対がどんどん生成される。この様子は図 2.6 に表してある。電子・陽子散乱深非弾性散乱によってジェットが生成する機構も同じである。

このように、カラーの閉じ込めのせいで、ハドロン分布は空間的に一様な分布で生成されるのではなく、く、親のクォークの方向に偏って生成される。この現象はジェットと呼ばれ、理論的に予想されていた。

ジェットがはじめて観測されたのは 1975 年で、SLAC における  $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$  反応においてであった [10][11]。その後、ジェットは電子の深非弾性散乱や  $\bar{p}p$  反応でも観測された。今日ではエネルギーが  $\sim 5$  GeV を越えるようなパートンは日常的にハドロンジェット



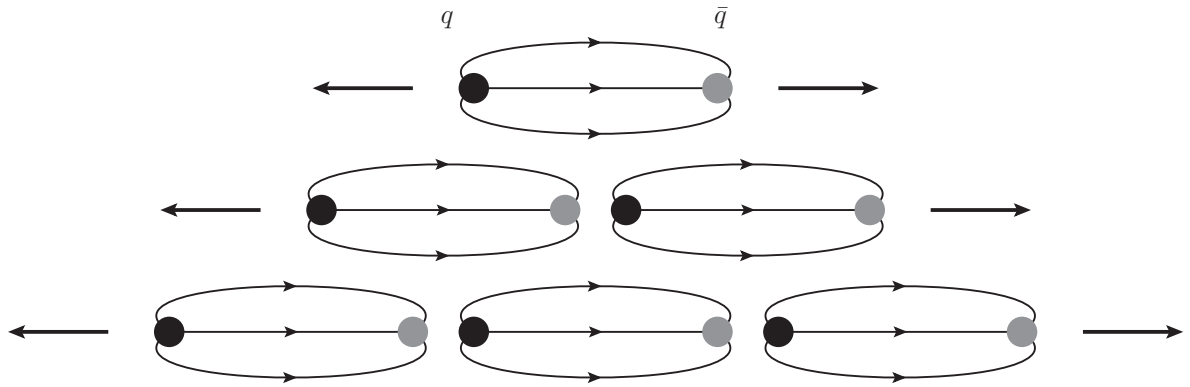


図 2.6: クォークと反クォークが分離したときのジェットの生成

トとして観測されている。ジェットは次のような性質を持つと考えられる。

- ジェットがパートンの変化したものであるならば、ジェットの形態は親のパートンの種類によってのみ決まり、親のパートンの由来 ( $e^+e^- \rightarrow hX, ep \rightarrow ehX, \bar{p}p \rightarrow hX$ ) には依存しない。つまり過程 (process) に依らない。
- ジェットの中の個々のハドロンは基本的に親のパートンと同方向に集中して出るはずである。この場合ハドロンの持つパートンの飛来方向に対しての縦運動量  $p_{||}$  は、親のパートンの運動量に比例して増大する。一方、横運動量  $p_T$  の平均値は、親のパートンに無関係にクォークの閉じ込めから生じる不確実性からくる揺らぎの程度で、数値としては 300 MeV と予想される。

以上により、 $p_T$  や質量を無視する近似では、パートンがハドロン化したときのハドロンの運動量分布関数、つまり破砕関数はスケーリングに従うと考えられる。

以降は電子-陽電子対消滅により生成するジェットについて考える。ハドロンの運動量を  $p_h$ 、親のパートンの運動量を  $p$  とするとき、パートン  $q(u, \bar{u}, d, \bar{d}, \dots)$  から生成されるハドロン  $h(= \pi^\pm, K, p, \bar{p})$  の破砕関数を  $D_q^h$  と書くと、 $D_q^h$  は、パートン分布関数との類推により、

$$z = \frac{p_h \cdot p}{p^2} \simeq \frac{2E_h}{E_{CM}} = \frac{2E_h}{\sqrt{s}} \quad (2.35)$$

の関数である。 $z$  はハドロンと親のパートンの運動量比である。破砕関数  $D_q^h$  はパートンに対して運動量比  $z$  を持ったハドロンをパートンの破片群中に見出す確率であるので、運動量比が  $z \sim z + dz$  の間にあるハドロンの数は、

$$dN_h = D_q^h(z) dz \quad (2.36)$$

で表される。 $e^+ + e^-$  反応で生成されるハドロンの種類  $h$  の量は、

$$\frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})[D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] \quad (2.37)$$

断面積  $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$  を求めるのに、電子-陽電子対消滅によるミュオン生成過程の断面積

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \quad (2.38)$$

を参考にすれば、クォークの電荷を  $\lambda_q e$  として、

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3\lambda_q^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \quad (2.39)$$

ハドロンの生成断面積を求めるには、すべてのクォークのフレーバーに対して足し合わせなければならないから、

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow hX) &= \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \\ &= 3 \sum_q \lambda_q^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \end{aligned} \quad (2.40)$$

したがって、(2.37),(2.39),(2.40) より電子-陽電子散乱によるハドロンの生成断面積は、

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow hX)}{dz} = \frac{\sum_q \lambda_q^2 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)]}{\sum_q \lambda_q^2} \quad (2.41)$$

となる。右辺は  $z$  のみの関数となり、重心系エネルギー  $s$  にはよらない。すなわち、スケールリングが成立している。

### 2.2.3 破砕関数の性質

運動量の保存により、破砕関数は次の関係を満たす必要がある。

$$\sum_h \int z D_q^h(z) dz = 1 \quad (2.42)$$

これは破砕関数の二次モーメントについての制限である。

アイソスピン独立と荷電共役対称性により、 $u$  が真空から  $d\bar{d}$  を拾い  $\pi^+(u\bar{d})$  を作る確率と、 $d$  が真空から  $u\bar{u}$  を拾い  $\pi^-(\bar{u}d)$  を作る確率は同一である。故に、

$$D_u^{\pi^+} = D_d^{\pi^-} = D_{\bar{u}}^{\pi^-} = D_{\bar{d}}^{\pi^+} \quad (2.43)$$

$$D_d^{\pi^+} = D_u^{\pi^-} = D_{\bar{d}}^{\pi^-} = D_{\bar{u}}^{\pi^+} \quad (2.44)$$

$$D_s^{\pi^+} = D_s^{\pi^-} = D_{\bar{s}}^{\pi^-} = D_{\bar{s}}^{\pi^+} \quad (2.45)$$

$$D_c^{\pi^+} = D_c^{\pi^-} = D_{\bar{c}}^{\pi^-} = D_{\bar{c}}^{\pi^+} \quad (2.46)$$

$$D_b^{\pi^+} = D_b^{\pi^-} = D_{\bar{b}}^{\pi^-} = D_{\bar{b}}^{\pi^+} \quad (2.47)$$

$$D_q^{\pi^0} = \frac{D_q^{\pi^+} + D_q^{\pi^-}}{2} \quad (2.48)$$

$\pi^+$  は中間子の価クォークのレベルで考えると、 $u$  と  $\bar{d}$  から構成されている。したがって、 $u, \bar{d}$  から  $\pi^+$  をつくる確率に比べ、 $\bar{u}, d$  から  $\pi^+$  を作る確率は小さくなるはずである。価クォークからできていて支配的な破砕関数のことを favored な破砕関数、他方を dis-favored な破砕関数と呼ぶ。上の場合で言えば、1 番目の式が favored な破砕関数 2 番めが dis-favored な破砕関数である。

favored な破砕関数  $D_{fav}$  と dis-favored な破砕関数  $D_{dis}$  の間には次の関係がある。

$$D_{dis} = (1 - z)D_{fav} \quad (2.49)$$

破砕関数は次の和則 [12] を満たす。

$$D_q^h(1, Q^2) - D_{\bar{q}}^h(1, Q^2) = const : \text{フレーバー保存則} \quad (2.50)$$

$$\sum_H D_q^h(2, Q^2) = 1 \quad (2.51)$$

## 2.3 QCD 補正

パートン模型が成り立つのは、個々のパートンの反応を独立に扱える場合だった。しかし、QCD の観点に立てば、クォーク同士がグルーオンなどを交換して相互作用する過程もありうる。したがって、QCD では分布関数も高次の影響を含めて拡張しなければならない。本節では、まず前節で出てきたパートン分布関数を QCD の形に拡張し  $q(x)$  が  $Q^2$  にも依存してくることを見る。しかし、パートン描像やパートン模型に伴う物理的解釈は依然として有効である。

### 2.3.1 パートン分布関数

深非弾性散乱は分布関数を与えられたものとして扱えば、最低次の近似では電弱相互作用効果である (図 2.7(a))。QCD 過程はこの過程への補正として効く (図 2.7(b)~(e))。

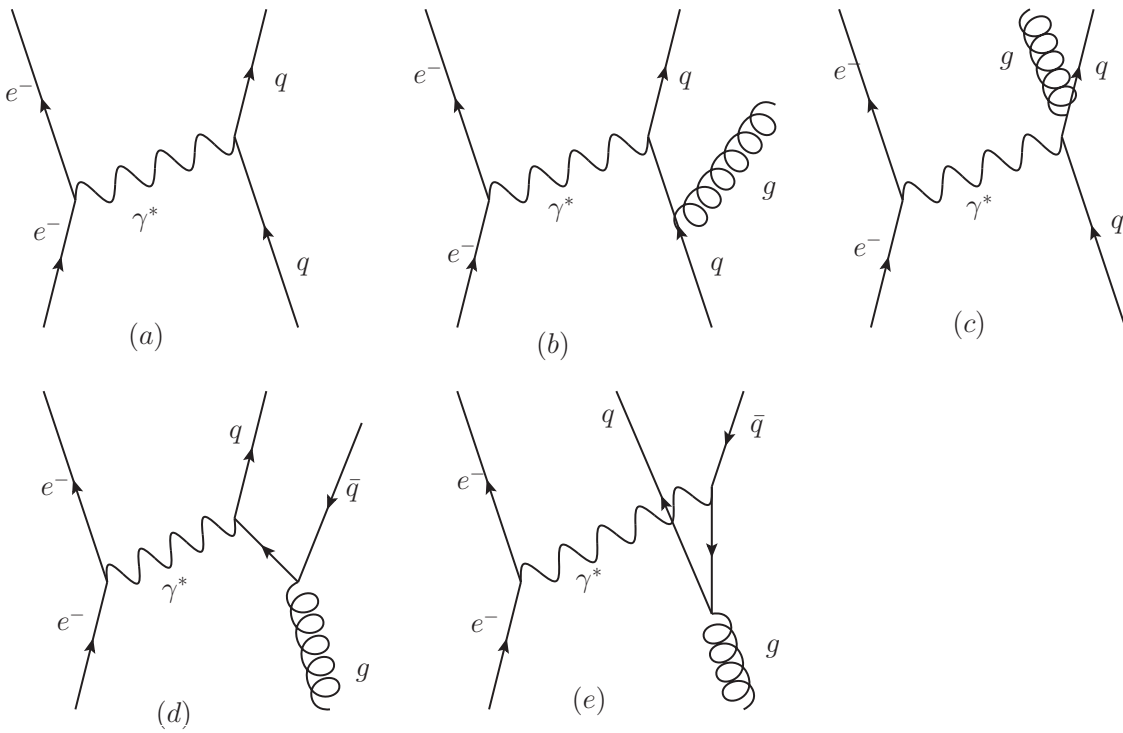


図 2.7: QCD 過程での深非弾性散乱のファインマン図

(a)  $eq \rightarrow eq$ : 電弱相互作用効果

(b)~(e) QCD 過程

(b),(c)  $\gamma^* q \rightarrow qg$  QCD コンプトン散乱

(d),(e)  $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$  フォトン・グルーオン融合過程

ここでは、深非弾性散乱の断面積への影響を計算することにより、パートン分布関数のQCD補正を考える。

深非弾性散乱を仮想光子の起こす反応とみなす立場を取れば、QCD補正効果は仮想光子とクォークが相互作用してグルーオンを放出するコンプトン効果の一種とみなせる。QCD過程を経ずパートンが直接仮想光子と反応する場合、反応断面積と構造関数の間には次の関係がある。

$$\sigma_T = \frac{4\pi^2\alpha}{K} W_1(Q^2, \nu) \quad (2.52)$$

$$\sigma_L = \frac{4\pi^2\alpha}{K} W_L(Q^2, \nu) \quad (2.53)$$

$$W_L = [(1 + \nu^2/Q^2)W_2 - W_1] \quad (2.54)$$

添字  $T, L$  は仮想光子の偏極状態で、それぞれ横偏極と縦偏極を表す。 $K$  は入射光子のエネルギーであるが、仮想光子では  $q^2 \rightarrow 0$  のときに光子のエネルギーに一致すればよい。ここでは、フラックスの定義

$$4KM|_{LAB} = 4[(qp)^2 - q^2p^2]^{1/2} = 4M(\nu^2 + Q^2)^{1/2} \quad (2.55)$$

を採用して、

$$K(\nu^2 + Q^2)^{1/2} \quad (2.56)$$

である。ブジョルケン・スケーリング (2.8) が成り立つところでは、

$$F_1(x) = \frac{\sigma_T}{2\sigma_B} \quad (2.57)$$

$$F_2(x) = x \frac{\sigma_T + \sigma_L}{\sigma_B} \quad (2.58)$$

$$\sigma_B = \frac{4\pi^2\alpha}{2KM} \quad (2.59)$$

である。ここで  $\sigma_B$  はボルン近似での仮想光子による全断面積である。

パートン分布関数  $q(x)$  と  $F_1(x)$  は (2.30) で結ばれているので、 $q(x)$  に QCD 補正効果を含めるには、 $\sigma_T$  に QCD 補正を加えればいい。図 2.7 のうち (b),(c) の仮想光子によるコンプトン散乱 ( $\gamma^* + q \rightarrow q + g$ ) を考える。運動学変数を図 2.8 のように定義する。 $k, k'$  は仮想光子と一次パートンの重心系での散乱前後の運動量、 $\theta$  は散乱角、 $Q$  は仮想光子の質量である。

$$\hat{s} = (q_\gamma + p)^2 = (q_g + p')^2 = -Q^2 + 2(q_\gamma \cdot p) = 4k'^2 \quad (2.60)$$

$$\hat{t} = (q_\gamma - p')^2 = -2(q_g \cdot p) = -2kk'(1 - \cos \theta) \quad (2.61)$$

$$\hat{u} = (q_\gamma - q_g)^2 = -2(p \cdot p') = -2kk'(1 + \cos \theta) \quad (2.62)$$

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} + Q^2 = 0 \quad (2.63)$$

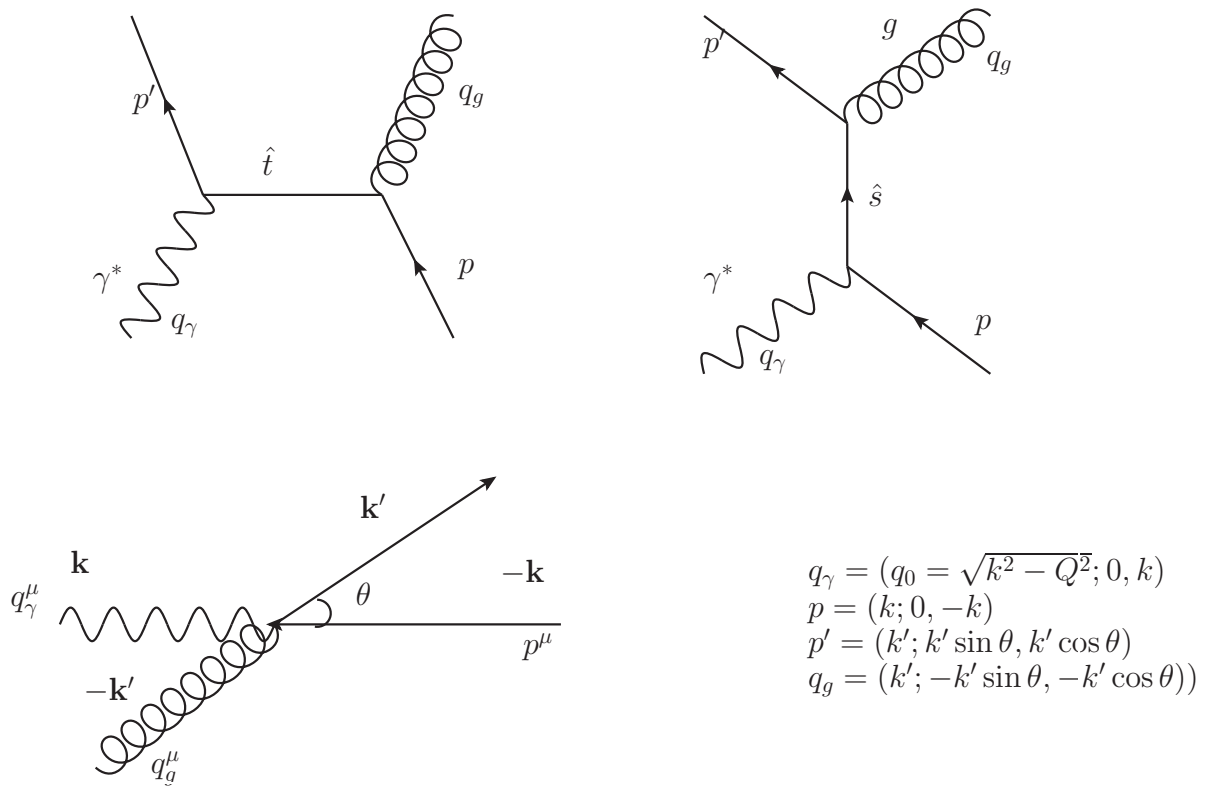


図 2.8: QCD コンプトン散乱の運動学変数

パートンの核子中における相対運動量  $z$  を次で定義する。

$$z \equiv \frac{Q^2}{2q_\gamma \cdot p} = \frac{Q^2}{\hat{s} + Q^2} \quad (2.64)$$

コンプトン散乱の行列要素を、上の変数を使って計算すると、

$$\sum |M(\gamma^* q \rightarrow qq)|^2 = 2e^2 \lambda_q^2 g_s^2 \frac{4}{3} \left[ -\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2Q^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} \right] \quad (2.65)$$

$g_s$  はグルーオンの結合定数である。したがって、微分断面積は

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\gamma^* q \rightarrow qq) = \frac{\alpha_s}{2\pi\hat{t}} \frac{4}{3} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} + \left(\frac{\hat{t}}{Q^2}\right) \frac{2z^2}{1-z} + \left(\frac{\hat{t}}{Q^2}\right)^2 \frac{z^2}{1-z} \right] \quad (2.66)$$

$$\sigma_0 = \frac{4\pi^2 \alpha \lambda_q^2 z}{Q^2} \quad (2.67)$$

$\hat{t}$  について積分することで、

$$\frac{\sigma_q}{\sigma_0} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \ln\left(\frac{Q^2}{m_g^2}\right) + \dots \quad (2.68)$$

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} \quad (2.69)$$

$m_g^2$  は質量異常発散を避けるために導入したグルーオンの質量である。 $P_{qq}$  はクォークの分割関数と呼ばれ、クォークがグルーオンを放出する確率とみなせる。この式は、グルーオンの質量を含むので直接観測にかかる物理量とはみなせない。直接観測にかかる核子非弾性散乱の断面積をパートンの反応の式で書き表す必要がある。クォークが最初に運動量  $y$  を核子の中で持っていたとすると、グルーオンは観測しないのだから、 $y, z$  について足し上げてやる必要がある。故に、

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_B} = \sum_i \lambda_i^2 \int dy dz \tilde{q}_i(y) \delta(x - yz) \left[ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \ln\left(\frac{Q^2}{m_g^2}\right) \right] \quad (2.70)$$

したがって、(2.30) より、QCD 補正を加えたパートン分布関数は、

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \tilde{q}(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{m_g^2}\right) \right] \quad (2.71)$$

と求められる。実際、QCD 効果を入れない第一次近似では

$$q(x, Q^2) = q(x) \quad (2.72)$$

となりパートンモデルを再現する。

今までは、仮想光子とクォークの散乱のみを考えたが、仮想光子とグルーオンとが融合して、 $q\bar{q}$  対を作る過程も考える必要がある。(図 2.7 (d),(e))。図 2.7(d),(e) に対応する行列要素は、(2.65) と同様にして、

$$\sum |M(\gamma^* g \rightarrow q\bar{q})|^2 = 2e^2 \lambda_q^2 g_s^2 \frac{1}{2} \left[ -\frac{\hat{u}}{\hat{t}} - \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{2Q^2 \hat{s}}{\hat{t}\hat{u}} \right] \quad (2.73)$$

したがって、微分断面積は

$$\frac{\sigma_T(\gamma^* g \rightarrow q\bar{q})}{\sigma_0} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \{P(z)_{qg} + P(z)_{q\bar{q}}\} \ln \left( \frac{Q^2}{m_g^2} \right) \quad (2.74)$$

$$P(z)_{qg} = P(z)_{q\bar{q}} = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (2.75)$$

質量異常による発散は  $\hat{t} \rightarrow 0$  と  $\hat{u} \rightarrow 0$  の双方に存在するので、(2.73) は、おのこの領域で優勢な二つの寄与に分けて積分する。 $\hat{t}$  についての積分はグルーオンがクォークを放出する分割関数  $P_{qg}$  を、 $\hat{u}$  についての積分はグルーオンが反クォークを放出する分割関数  $P_{q\bar{q}}$  を与える。

### 2.3.2 DGLAP 方程式

ある値、 $Q_0^2$  での分布関数が分かっているとき、そこから  $Q^2$  の変化により分布関数がどのように変化するかを導くのが DGLAP の発展方程式 [13][14][15][16] である。

パートン分布関数を例に取り発展方程式を求めてみたい。 $Q^2 = Q_0^2$  で  $q(x) = q(x, Q_0^2)$  が与えられたときに、(2.71) は (2.72) から推測できるように、 $Q^2 = Q_0^2 + dQ^2$  での振舞いを記述するとみなすことができる。この場合、第二項が QCD 最低近似の寄与による分布関数の補正  $dq$  を与える。よって、両辺を  $\tau = \ln(Q^2/\mu^2)$  で微分することにより、

$$\frac{dq(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, \tau) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) \quad (2.76)$$

を得る。 $\mu^2$  は繰り込み点である。 $f \otimes g$  は畳み込み積分で、

$$f \otimes g \equiv \int_x^1 \frac{dy}{y} f \left( \frac{x}{y} \right) g(y) = \int_0^1 \int_0^1 dz dy f(z) g(y) \delta(x - yz) \quad (2.77)$$

で定義される。この式はある  $Q^2$  の値が与えられた分布関数が、 $Q^2$  が変るにつれてどう変化するかを示す発展方程式である。次に (2.71) を、グルーオン分布を含む場合に拡張する。グルーオン分布関数を  $g(x, \tau)$  とする。仮想光子の見るクォークは、元の核子の提供するクォーク及び、グルーオンによって供給される 2 次的なクォークの和で式を書けば、

$$\frac{dq(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y, \tau) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y, \tau) P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \quad (2.78)$$



同様にグルーオンの分布関数に対しては

$$\frac{dg(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y, \tau) P_{gq} \left( \alpha \frac{x}{y} \right) + g(y, \tau) P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \quad (2.79)$$

ここで、 $P_{gq}$  はクォークがグルーオンを放出する分割関数、 $P_{gg}$  はグルーオンがグルーオンを放出する分割関数である。クォークの香り  $i$  及び、反クォーク、クォークを区別して、分布関数  $q_i(x, \tau)$ ,  $\bar{q}_i(x, \tau)$  を導入し、一重項分布関数  $\Sigma$ , 非一重項分布関数  $\Delta$  を次式で定義する。

$$\Sigma(x, \tau) \equiv \sum_i [q_i(x, \tau) + \bar{q}_i(x, \tau)] = F_2(x, \tau)/x \quad (2.80)$$

$$\Delta(x, \tau) \equiv \sum_i [q_i(x, \tau) - \bar{q}_i(x, \tau)] \quad (2.81)$$

これら  $\Sigma, \Delta$  が満たす方程式は、(2.78),(2.79) から、

$$\frac{d\Delta(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [\Delta(y, \tau) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right)] \quad (2.82)$$

$$\frac{d\Sigma(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [\Sigma(y, \tau) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) + 2n_f g(y, \tau) P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right)] \quad (2.83)$$

$$\frac{dg(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [\Sigma(y, \tau) P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y, \tau) P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right)] \quad (2.84)$$

$n_f$  は香りの数である。この方程式を DGLAP 方程式と呼ぶ。 $Q^2$  を与えたとき、 $x$  の変数としての構造関数は QCD で摂動計算することはできない。しかし、構造関数がある  $Q^2 = Q_0^2$  で  $x$  の関数として与えられるならば、 $Q^2$  を変えたときにどう発展していくかは発展方程式で完全に決まる。

発展方程式を解くにあたっては分割関数を知る必要があるが、対数第一次近似では、対象とする物理過程の種類によらない普遍関数であり、一般的に計算する方法が与えられていて、

$$P_{gg}(z) = 6 \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right] \quad (2.85)$$

対称性分割関数の間には次の関係がある。

$$P_{qq}(z) = P_{qq}(1-z) \quad (2.86)$$

$$P_{qg}(z) = P_{\bar{q}g}(1-z) \quad (2.87)$$

$$P_{gg}(z) = P_{gg}(1-z) \quad (2.88)$$

## 2.4 因子化

摂動の高次効果について、ソフトな部分(長距離相互作用)とハードな部分の分離が可能であることが証明されている。この定理のことを因子化定理と呼ぶ。計算上発散を与えるソフトグルーオンの効果はパートン分布関数、破砕関数といった分布関数に吸収され、観測量は分布関数と摂動論的に計算可能なパートンレベルでの断面積との積となる。摂動計算可能な部分は係数関数  $C$  にまとめて表現される。

因子化定理によれば構造関数  $F$  と係数関数  $C$ , 分布関数  $f$  の間には次の関係が成り立つ。

$$F = C \times f \quad (2.89)$$

つまり、実験で  $F$  を測定し摂動計算によって  $C$  を求めておけば核子の内部構造を持つパートン分布関数やハドロン化を記述する破砕関数を計算することができる。この時、無限大の発散はパートン分布関数、破砕関数の定義に中に取り込まれている。係数関数の具体的な形については付録に載せる。

## 2.5 高エネルギー過程

構造関数は摂動論により計算される係数関数と分布関数の積で表されることを 2.4 節で議論した。本節では高エネルギー過程の断面積、構造関数がどのように係数関数と分布関数によって表されるかを見ていく。

なお本節ででてくる係数関数  $C$  の具体的な形については付録 B を参照されたし。

### 2.5.1 深非弾性散乱

電子、ハドロン散乱のうち、ブジョルケン・スケーリング (2.8) を満たす散乱を深非弾性散乱 (Deep Inelastic Scattering; DIS) と言う。

$$e^-(k) + H(p) \rightarrow e^-(k') + X \quad (2.90)$$

この過程は図 2.1 で表されている。深非弾性散乱の変数は図 2.1 及び、表 2.1 にまとめている。これらの変数を用いると、DIS による微分散乱断面積は

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} s \left[ F_2(x, Q^2)(1-y) + 2xF_1(x, Q^2)\frac{y^2}{2} \right] \quad (2.91)$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4} ((1+(1+y)^2)2F_2(x, Q^2) + 2(1-y)F_L(x, Q^2)) \quad (2.92)$$

と表される。 $F_L$  は次で定義される。

$$2F_1 = F_L + \frac{F_2}{x} \quad (2.93)$$

構造関数を係数関数とパートン分布関数を用いて表せば、 $F_1, F_L$  はそれぞれ NLO の精度で

$$2F_1(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} \lambda_q^2 \left( q(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{2\pi} (C_q^1 \otimes q(x, \mu_F^2) + C_g^1 \otimes g(x, \mu_F^2)) \right) \quad (2.94)$$

$$F_L(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{2\pi} \sum_{q, \bar{q}} \lambda_q^2 (q(x, \mu_F^2) + (C_q^L \otimes q(x, \mu_F^2) + C_g^L \otimes g(x, \mu_F^2))) \quad (2.95)$$

と表される。 $\alpha_s \rightarrow 0$  の極限ではパートン模型と同じ結果を導く。

## 2.5.2 準包括的深非弾性散乱

深非弾性散乱では、反跳電子のみを測定したが、深非弾性散乱によって生成されるハドロンも測定する場合を準包括的深非弾性散乱 (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering; SIDIS) という。

$$e^-(k) + N(p) \rightarrow e^-(k') + H(p_h) + X \quad (2.96)$$

この過程は図 2.9 で表されている。 $p_h$  は生成されたハドロンの 4 元運動量で、 $p_h = (E_h, \mathbf{p}_h)$  である。深非弾性散乱の変数に加え、変数  $z$  を次のように定義して導入する。

$$z = \frac{p \cdot p_h}{p \cdot q} \stackrel{\text{LAB}}{=} \frac{E_h}{\nu} \quad (2.97)$$

$q$  は仮想光子の運動量である。SIDIS の変数は表 3.4 にまとめる。

微分断面積は、

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2 dz} = \frac{8\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ F_2^H(x, z, Q^2) \frac{(1-y)}{x} + 2F_1^H(x, z, Q^2) \frac{y^2}{2} \right] \quad (2.98)$$

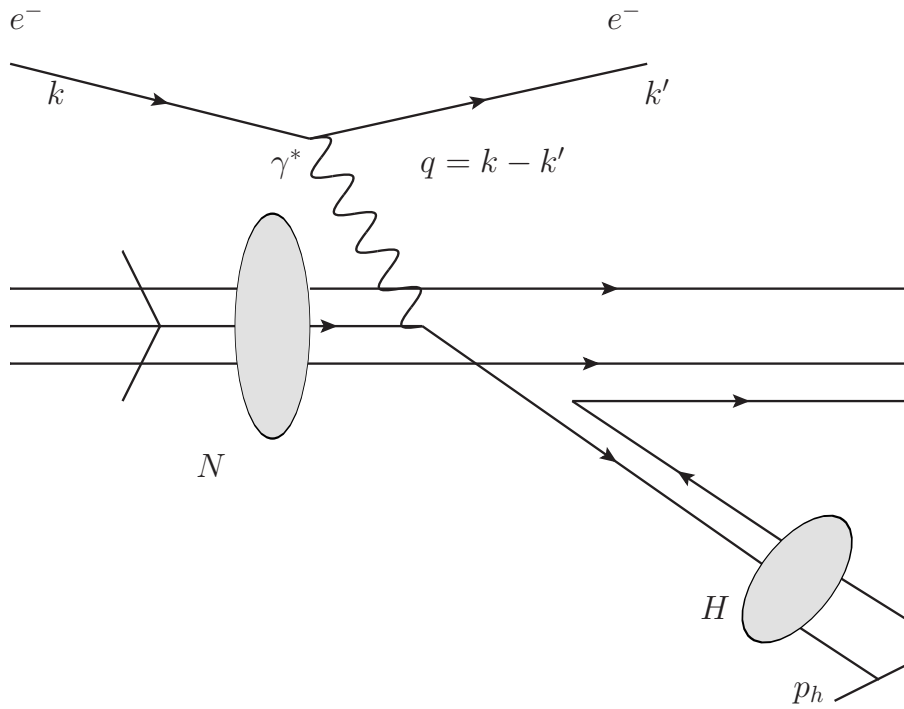


図 2.9: 準包括的深非弾性散乱

$k = (\omega, \mathbf{k})$	散乱前の電子の 4 元運動量
$p = (M, 0)$	散乱前の陽子の 4 元運動量
$k' = (\omega', \mathbf{k}')$	散乱後の電子の 4 元運動量
$p_h = (E_h, \mathbf{p}_h)$	生成されたハドロンの 4 元運動量
$\theta$	電子の散乱角 (実験室系)
$\nu = \frac{p \cdot q}{M} \stackrel{\text{LAB}}{=} \omega - \omega'$	仮想光子のエネルギー
$q = (\nu, \mathbf{q}) = (k - k')$	仮想光子の 4 元運動量
$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 \stackrel{\text{LAB}}{=} 4\omega\omega' \sin^2 \theta/2$	遷移運動量
$s \stackrel{\text{LAB}}{=} 2\omega M$	スケーリング変数
$y \stackrel{\text{LAB}}{=} \frac{2M\nu}{s}$	スケーリング変数
$x \stackrel{\text{LAB}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$	スケーリング変数 (ブジョルケン $x$ )
$z = \frac{p \cdot p_h}{p \cdot q} \stackrel{\text{LAB}}{=} \frac{E_h}{\nu}$	親のパートンと生成ハドロンの運動量比
$M$	陽子の質量

表 2.2: SIDIS の運動学的変数

で与えられる。構造関数  $F_i^H, F_L^H$  は NLO の精度で、

$$\begin{aligned}
2F_1^H(x, z, Q^2) = & \sum_{q, \bar{q}} \lambda_q^2 \left\{ q(x, Q^2) D_q^H(z, Q^2) \right. \\
& + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [q \otimes C_{qq}^1 \otimes D_q^H(z, Q^2) \\
& + q \otimes C_{gq}^L \otimes D_g^H + g \otimes C_{qg}^1 \otimes D_q^H] \\
& \left. \times (x, z, Q^2) \right\} \tag{2.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_L^H(x, z, Q^2) = & \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \sum_{q, \bar{q}} \lambda_q^2 [q \otimes C_{qq}^L \otimes D_q^H \\
& + q \otimes C_{gq}^L \otimes D_g^H + g \otimes C_{qg}^L \otimes D_q^H] \\
& \times (x, z, Q^2) \tag{2.100}
\end{aligned}$$

と与えられる。

SIDIS 実験の断面積は DIS で得た断面積との比、多重度  $\eta^H$  によって表されている。

$$\eta^H = \frac{d^2\sigma^H}{dx^d i Q^2 dz}(x, z, Q^2) \Big/ \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2}(x, Q^2) \tag{2.101}$$

### 2.5.3 電子－陽電子対消滅

電子・陽電子を衝突させると電子－陽電子対消滅によりジェットとして、ハドロンを生成する。この反応ではジェットとして生成したハドロンのうち一種類のみを包括的に測定する (Single hadron inclusive measurement in  $e^+e^-$  annihilation; SIA)。この過程は図 2.10 に表している。

$$e^-(k, \lambda) + e^+(k', \lambda') \rightarrow H(p_h) + X \tag{2.102}$$

電子－陽電子対消滅の変数は図 2.10 及び、表 2.3 に示してある。電子－陽電子対消滅の

$k = (\omega; \mathbf{k})$	電子の 4 元運動量
$k' = (\omega'; \mathbf{k}')$	陽電子の 4 元運動量
$p = (E_p; \mathbf{p})$	親のパートンの 4 元運動量
$p_h = (E_h; \mathbf{p}_h)$	生成されたハドロンの 4 元運動量
$q = (k + k')^2$	仮想光子の 4 元運動量
$Q^2 = q^2 = (k + k')^2 = s$	遷移運動量
$z = \frac{2p_h \cdot p}{p^2} = \frac{2E_h}{Q}$	パートンがハドロン化したときのハドロンの運動量比

表 2.3: SIA の運動学的変数

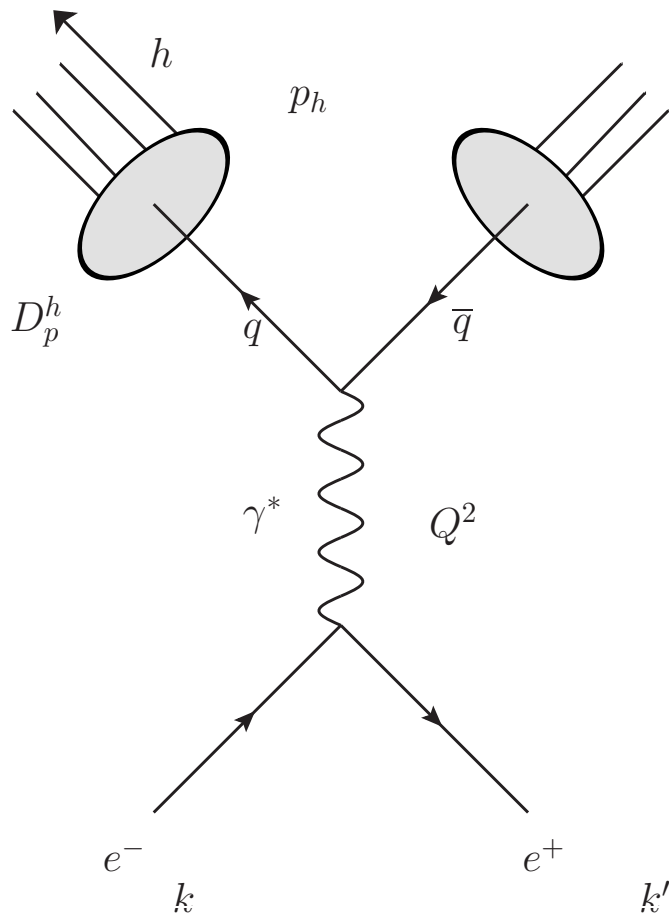


图 2.10: 電子-陽電子对消滅

場合ハドロンと親のパートンの運動量比  $z$  は

$$z \equiv \frac{2p_h \cdot p}{p^2} = \frac{2E_h}{Q} \quad (2.103)$$

で定義されている。これらの変数を用いると電子-陽電子対消滅による微分断面積  $d\sigma_h$  は以下のように表すことができる。

$$\frac{d\sigma_h}{dz} = \frac{4\pi\alpha_e}{s} (2F_1^H(z, Q^2) + F_L^H(z, Q^2)) \quad (2.104)$$

実験的には、

$$\frac{1}{\sigma_{\text{tot}}} \frac{d\sigma^H}{dz} \quad (2.105)$$

が測定される。 $\sigma_{\text{tot}}$  は電子-陽電子対消滅によるハドロン生成過程の全断面積である。具体的には、

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_q \lambda_q^2 \frac{4\pi\alpha}{s} \left( 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right) \quad (2.106)$$

で与えられる。構造関数は

$$2F_1^H(z, Q^2) = \sum_{q\bar{q}} \lambda_q^2 \left( D_q^H(z, \mu_f^2) + \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{2\pi} (C_q^{H,1} \otimes D_q^H(z, \mu_F^2) + C_g^{H,1} \otimes D_g^H(z, \mu_f^2)) \right) \quad (2.107)$$

$$F_L^H(z, Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{2\pi} \sum_{q\bar{q}} \lambda_q^2 (C_q^{H,L} \otimes D_q^H(z, \mu_F^2) + C_g^{H,L} \otimes D_g^H(z, \mu_f^2)) \quad (2.108)$$

で表される。

破碎関数を通して、電子-陽電子対消滅は準包括的深非弾性散乱と同じように扱えるが、一つ大きな違いがある。レプトンの生成過程の場合、 $u, d, s$  クォークは核子標的の中にたくさんあるので、これらが主役を演じる。しかし、電子-陽電子対消滅では重いクォークの生成も  $u, d, s$  と同様に起こる。チャームクォークは閾値 ( $Q^2 = 4m_c^2$ ) を越えると生成されはじめる。 $c, \bar{c}$  は生成されるとソフトハドロンに弱崩壊していく。そのため、他の軽いクォークとは異なった振る舞いをする。電子-陽電子対消滅ではこの重いクォークの寄与が、グルーオン放出によるスケーリングの破れとともにスケーリングの破れをもたらす。

# 第3章 解析手法

本章では、解析のフレームワークについて説明する。まず、DGLAP 方程式を用いた  $Q^2$  発展を能率的に計算するために導入した Mellin 変換について述べる。3.2 節で破碎関数の初期関数形および制限について述べた後、解析に用いたデータについて説明する。3.4 節では誤差評価について説明する。最後にこの章の総括として解析手順をまとめる。

## 3.1 Mellin 変換

DGLAP の発展方程式を解くには、ラプラス変換の特殊な形である Mellin 変換を導入することで計算が簡単になり、効率よく計算できるようになる。

Mellin 変換は次で定義される。

$$f(n) = \int_0^1 dx \ x^{n-1} f(x) \quad (3.1)$$

この変換は、畳み込み積分 (2.77) を計算するとき役に立つ。畳み込み積分 (2.77) は Mellin 変換 (3.1) のもとで、

$$f \otimes g \rightarrow f(n)g(n) \quad (3.2)$$

と積の形に変換されるため、積分 (2.77) を実行するのに比べて計算が簡単になる。

Mellin 変換の特徴はラプラス変換に戻ることで明らかになる。ラプラス変換は

$$F(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t) \quad (3.3)$$

関数  $f(t)$  は  $(0, \infty)$  で定義されている。 $s$  は複素数で  $s = \sigma + i\tau$  である。積分の収束性は  $s$  に依存する。複素数  $s_0$  で積分が収束したとすれば、 $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0) \equiv \gamma_0$  を満たす  $s$  に関して、 $F(s)$  は収束する。この  $\gamma_0$  のことを収束座標と呼ぶ。例えば  $f(t) = 1$  のとき、 $\gamma_0 = 0$  で  $F(s) = 1/s$  になる。 $F(s)$  が  $\text{Re}(s) > \gamma_0$  で正則なら、 $F(s)$  は  $\text{Re}(s) = \gamma_0$  の右側には特異点を持たない。この状況は図 3.1 に示す。

逆ラプラス変換は、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds e^{st} F(s) = \frac{1}{2} \{f(t+0) + f(t-0)\} \quad (3.4)$$



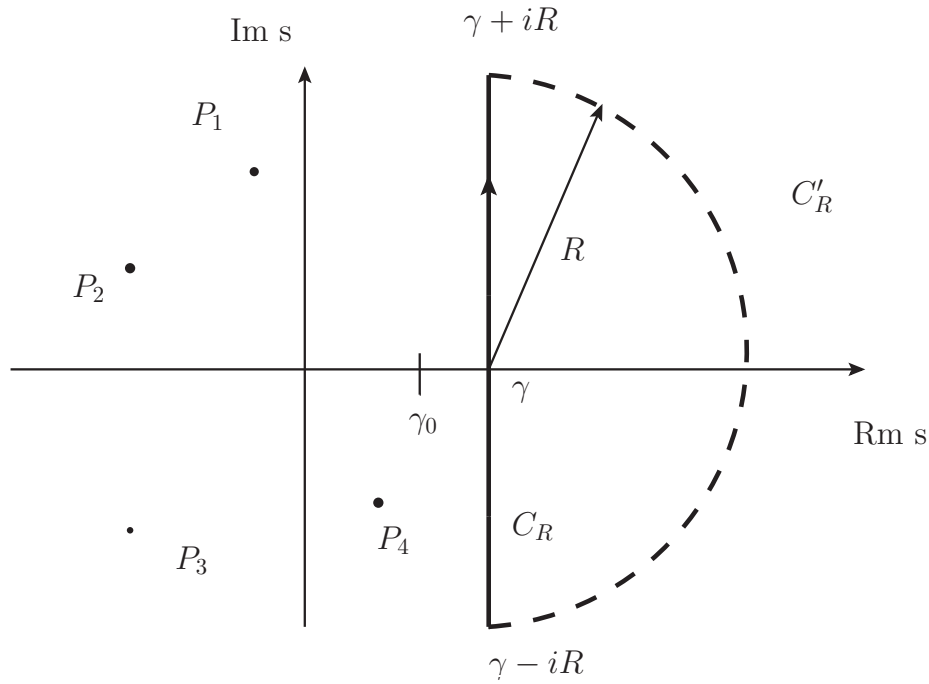


図 3.1: ラプラス変換

で定義される。 $\gamma > \gamma_0$  で  $f(t \pm 0)$  は  $t$  に  $\pm$  どちらの方向から近づいていくのかを表す。これは  $f(t)$  が  $t$  で不連続の時に必要になってくる。

ラプラス変換 (3.3) を  $t = -\ln x$  と置き換えると、積分範囲は  $0 \rightarrow 1$ ,  $\infty \rightarrow 0$  と置き換わり Mellin 変換 (3.1) を得る。Mellin 変換の逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} dx x^{-n} f(n) \quad (3.5)$$

で定義される。 $c_0$  は  $f(x)$  のすべての特異点が積分路の左になるようにとる実数である。

## 3.2 パラメタリゼーション

初期エネルギースケール  $\mu_{0,F}$  での初期関数として、pQCD 分野で広く使われている一般形、

$$f(z, \mu_{0,F}^2) = \sum_{i,j=0} a_{ij} z^{\alpha_i} (1-z)^{\beta_j} \quad (3.6)$$

を用いる。 $a_{i,j}, \alpha_i, \beta_j$ 、フィッティングの過程で決定されるパラメータである。初期エネルギースケールは通常 1 GeV とした。Mellin 変換 (3.1) を行うと (3.6) は、ベータ関数

$$B(n, m) = \int_0^1 dt t^{n-1} (1-t)^{m-1} = \Gamma(n)\Gamma(m)/\Gamma(n+m) \quad (3.7)$$

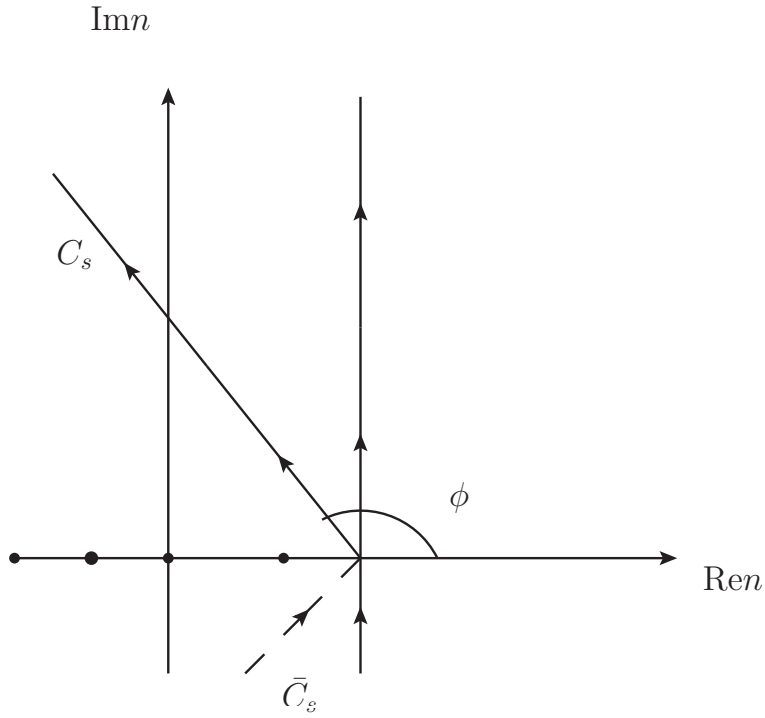


図 3.2: 逆 Mellin 変換

に変換される。ここで  $\Gamma$  はガンマ関数で  $n, m$  は複素変数である。具体的には、破砕関数の初期形として

$$D_{q,g}^h(z, \mu_F^2) = \frac{\eta z^\alpha (1-z)^\beta}{B(\alpha+2, \beta+1)} \quad (3.8)$$

を採用する。ここで、 $\eta, \alpha, \beta$  がフィットされるパラメータである。

研究グループ [17][18] によっては、解析的に変換できない複雑な関数形を採用しているグループもある。本フレームワークでは解析的に変換できない関数も扱えるように、数値的に  $x$  空間から Mellin 空間に変換する機構も導入してある。したがって、原理的にはどのような形の初期分布関数でも本フレームワークで扱うことができる。例えば、DSS グループは初期関数形として

$$D_i^h(z, ) = \frac{N z^\alpha (1-z)^\beta [1 + \gamma (1-z)^\delta]}{B(2 + \alpha, \beta + 1) + \gamma B(2 + \alpha, \beta + \delta + 1)} \quad (3.9)$$

を採用しているが本フレームワークのなかで同じように扱える。

2.2 節で述べたように、破砕関数には荷電共役対称性が成り立つので、制限として、

$$D_q^H(z, \mu_F^2) = D_{\bar{q}}^{\bar{H}}(z, \mu_F^2) \quad (3.10)$$

がかかる。

### 3.2.1 $\pi$ 中間子の破砕関数

$\pi$ 中間子にたいしては2.2節で議論したように、制限として(2.44)～(2.44)がかかる。

本解析ではフレーバーSU(3)対称性は考えておらず、ストレンジクォークの扱いはdis-favoreな破砕関数から分離される。SIAだけを扱うのならば、短距離でのdクォークとsクォークの違いに断面積は左右大きく影響しないので、にこの差別化は意味のないものとなる。しかし、本解析では準深非弾性散乱も扱うため、このような差別化を行う。

### 3.2.2 $K$ 中間子の破砕関数

$K$ 中間子の破砕関数に対してはつぎの制限をかける。

$$D_u^{K^+}(z) \neq D_{\bar{s}}^{K^+}(z) \quad (3.11)$$

$$D_d^{K^+}(z) = D_{\bar{u}}^{K^+}(z) = D_s^{K^+}(z) = D_{\bar{d}}^{K^+}(z) \quad (3.12)$$

$\pi$ 中間子のときと同様に(3.11),(3.12)がそれぞれfavored,dis-favoredな破砕関数に対応する。重いクォークに対しては、

$$D_c^{K^+}(z) = D_{\bar{c}}^{K^+}(z), \quad D_b^{K^+}(z) = D_{\bar{b}}^{K^+}(z) \quad (3.13)$$

$K^+$ は $u$ があっても $\bar{s}$ がなければ生成されないが、真空から $u\bar{u}$ 対を作るのに比べ $s\bar{s}$ 対を作るのにはより大きなエネルギー必要となる。そのため、 $\bar{s}$ から $K^+$ を作る過程のほうが、 $u$ から $K^+$ を作る確率よりも大きいと考えられる。したがって、ここでも $\pi$ 中間子同様SU(3)が破れているとして、破砕関数を扱っている(3.11)。

### 3.2.3 重いクォークの扱い

結合定数(2.33)はフレーバーの種類 $n_f$ に依存する。エネルギーが増えるにつれて重いクォークが生成されてくるため、エネルギーが増えるにつれて結合定数に関しても修正しなければならない。エネルギーとフレーバーの数の関係は次のようになる。

$$n_f = \begin{cases} 3 & : \quad \mu_{0,R} \sim 1\text{GeV} < \mu_R < m_c \\ 4 & : \quad m_c < \mu_R < m_b \\ 5 & : \quad m_b < \mu_R < m_t \\ 6 & : \quad m_t < \mu_R \end{cases} \quad (3.14)$$

ここで、 $m_{c,b,t} = 1.4, 4.5, 174$  GeVである。

分割関数にもフレーバーの数 $n_f$ が表れるため破砕関数、パートン分布関数にも重いクォークの影響は表れる。

### 3.3 解析データの選択

$\pi$ 中間子、 $K$ 中間子の破砕関数を計算するために使った実験データを挙げる。データは大きく分けて電子・陽電子対消滅からのものと準包括的深非弾性散乱からのものに分けられる。いずれの過程においても  $0.05 < z < 0.8$  の間にある実験データのみを用いて解析を行った。

#### 3.3.1 電子・陽電子対消滅

いくつか注意点を述べておく。

- 荷電粒子に対してはイールドは粒子・反粒子の和になっている。
- 実験によっては生成ハドロンのエネルギー  $E_h$  ではなく 4 元運動量  $p_h$ (2.35) でデータが与えられているものがある。これらについては  $E_h^2 = p_h^2 + m_h^2$  においてエネルギーに変換した。

各データについて述べる。

★  $e^+ + e^-$  に依る  $\pi^\pm$  生成

表 4.1 は  $e^+ + e^-$  に依る  $\pi^\pm$  生成のデータである。 $\pi$ 中間子 ( $\pi^+$ ) の破砕関数の解析に用いる。

★  $e^+ + e^-$  に依る  $\pi^0$  生成

表 3.2 は  $e^+ + e^-$  に依る  $\pi^0$  生成のデータである。 $\pi$ 中間子 ( $\pi^+$ ) の破砕関数の解析に用いる。

★  $e^+ + e^-$  に依る  $K^\pm$  生成

表 3.3 は  $e^+ + e^-$  に依る  $K^\pm$  生成のデータである。 $K$ 中間子 ( $K^+$ ) の破砕関数の解析に用いる。

Data set	Q [GeV]	No. of data
TASSO [19]	34	16
TASSO [19]	44	12
TPC [20]	29	15
SLD(inclusive) [21]	91.2	39
SLD(c quark) [21]	91.2	27
SLD(b quark) [21]	91.2	27
ALEPH[22]	91.2	39
OPAL [23]	91.2	50
DELPHI(inclusive)[24]	91.2	23
DELPHI(b quark)[24]	91.2	23

表 3.1:  $e^+ + e^- \rightarrow \pi^\pm + X$

Data set	Q [GeV]	No. of data
TASSO [19]	44	7
TPC [25]	29	10
L3 [26]	91.2	22
ALEPH[27]	91.2	13
OPAL [28]	91.2	20
DELPHI[29]	91.2	24

表 3.2:  $e^+ + e^- \rightarrow \pi^0 + X$

Data set	Q [GeV]	No. of data
TASSO [19]	34	11
TASSO [19]	44	4
TPC [20]	29	21
SLD(inclusive) [21]	91.2	33
SLD(c quark) [21]	91.2	21
SLD(b quark) [21]	91.2	21
ALEPH[22]	91.2	29
OPAL [23]	91.2	33
DELPHI(inclusive)[30]	91.2	16
DELPHI(inclusive)[24]	91.2	23
DELPHI(b quark)[24]	91.2	23

表 3.3:  $e^+ + e^- \rightarrow K^\pm + X$

### 3.3.2 準包括的深非弾性散乱

表 3.4 は解析に用いた準包括的深非弾性散乱の多重度  $\eta^H$  の表である。 $\eta^H$  は  $x, z, Q^2$  の関数である。実験的には  $z$  は  $x, Q^2$  とは独立である。実験名の横の ( ) の中に示されている  $p, d$  はターゲットの種類、 $\pi^\pm, K^\pm$  は測定されたハドロンの種類である。

## 3.4 誤差評価

解析で決めるのは、

- どのようにパラメータ  $a_j$  の最適値と誤差を決めるか。
- いかによりパラメータ  $a_j$  の関数として表される物理量  $A^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2, \dots$  を決めるか。

の 2 つである。最適値と誤差を決めるには通常  $\chi^2$  検定が用いられる。しかし、グローバル解析では、多様な実験を扱い、解析で決めるべきパラメータの数も多い。そのため、どのように最適値を決めるかという問題は通常の場合よりも複雑になる。

本節では  $\chi^2$  検定の基礎について説明した後、誤差評価の方法として Hessian 法、ラグランジュの未定乗数法について説明する。最後に許容変位の扱いについて述べる。

### 3.4.1 最尤性原理

観測量から最良推定値を見つけるための基礎的な手続きは最尤性原理として確立されている。平均値を中心値としてとることや、平均二乗根を標準偏差ととること、平均値

Data set	$\sqrt{s}$ [GeV]	No. of data
HERMES( $p, \pi^+$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $p, \pi^-$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $p, K^+$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $p, K^-$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $d, \pi^+$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $d, \pi^-$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $d, K^+$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13
HERMES( $d, K^-$ )[31]	$\sqrt{2.5}$	13

表 3.4: SIDIS 過程

の標準偏差を中心値の誤差と扱うことの基礎を与えるのもこの最尤性原理であり、統計学の基礎となる原理である。これ以降、観測量の分布はガウス分布に従うとして話を進める。

いま確率分布  $f(x; \mathbf{a})$  に従う  $n$  個の独立な観測サンプル  $x_i (x_1, x_2 \cdots x_n)$  があるとする。 $a_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) は決めるべきパラメータで、例えば平均値  $\mu$  やその分散  $\sigma^2$  が  $a_j$  に対応する。このとき尤度関数  $L(x; \mathbf{a})$  をつぎで定義する。

$$L(x; \mathbf{a}) = f(x_1; \mathbf{a})f(x_2; \mathbf{a}) \cdots f(x_n; \mathbf{a}) \quad (3.15)$$

$a_j$  の最良推定値とは測定量  $x_1, x_2 \cdots x_n$  が得られる確率を最大にするようなそれらの値である。したがって、 $L$  を最大にする  $a_j$  が最良推定値なので、 $a_j$  は

$$\frac{\partial}{\partial a_j} L = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \ln L = 0 \quad (3.17)$$

を解くことで得られる。

理論計算によって与えられる  $x_i$  に対応する値を  $F(a_j)$  とする。観測量分布がガウス分布に従うなら、確率分布は、

$$f(x_i; a_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_i - F(a_j))^2}{\sigma_i(a_j)^2}\right)\right) \quad (3.18)$$

したがって、尤度関数  $L$  は

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - F(a_j))^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (3.19)$$

で与えられる。(3.17)を用いれば上は、

$$\ln L = - \sum_i^n \frac{1}{2} \frac{(x_i - F(a_j))^2}{\sigma_i^2} = 0 \quad (3.20)$$

$\chi^2(a_j)$  を次で定義する。

$$\chi^2(a_j) \equiv \sum_i^n \frac{(x_i - F(a_j))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.21)$$

$\chi^2$  を用いると (3.20) は、

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \chi^2(a_j) = 0 \quad (3.22)$$

$\chi^2$  の定義により  $\ln L$  と  $\chi^2$  は符号が異なるので、最尤性原理は  $\chi^2$  を最小にすると読み替えることに注意する。

### 3.4.2 $\chi^2$ 検定

観測された分布が、理論的に予想した分布と一致しているかを検定する手法が  $\chi^2$  検定である。 $N$  個のサンプル点  $x_i(x_1, x_2 \cdots x_n)$  がそれぞれ独立に平均値  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  のガウス分布に従うなら、値

$$Q = \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (3.23)$$

は  $\chi^2$  分布に従う。 $\chi^2$  分布は確率密度関数として与えられており、自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布は、

$$f(x, k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \quad (3.24)$$

で表される。 $\Gamma$  はガンマ関数である。サンプル点の数が  $N$  個あっても、サンプル点  $x_i$  から最尤法を使って  $\mu, \sigma$  については求めることができるので自由度が 2 減り、実際に解析を行う際の自由度は  $N - 2$  になる。異なる  $k$  についての  $\chi^2$  分布を図 3.3 に示す。 $\chi^2$  分布は平均値  $k$  及び、分散  $2k$  を持つので、 $x_i$  がガウス分布に従うなら  $Q$  は平均値  $k$  のまわりに分散  $2k$  で分布する。

信頼水準 CL は、

$$CL(s) = \int_s^\infty dx f(x, k) \quad (3.25)$$

ここで、 $s$  は  $x > 0$  と取ったある点である。通常、CL= 0.05 を  $x_i$  の無作為性を判断する基準とする。大雑把な目安としては、もし  $\mu$  が正しい推定値であれば、 $(x_i - \mu)$  は平均



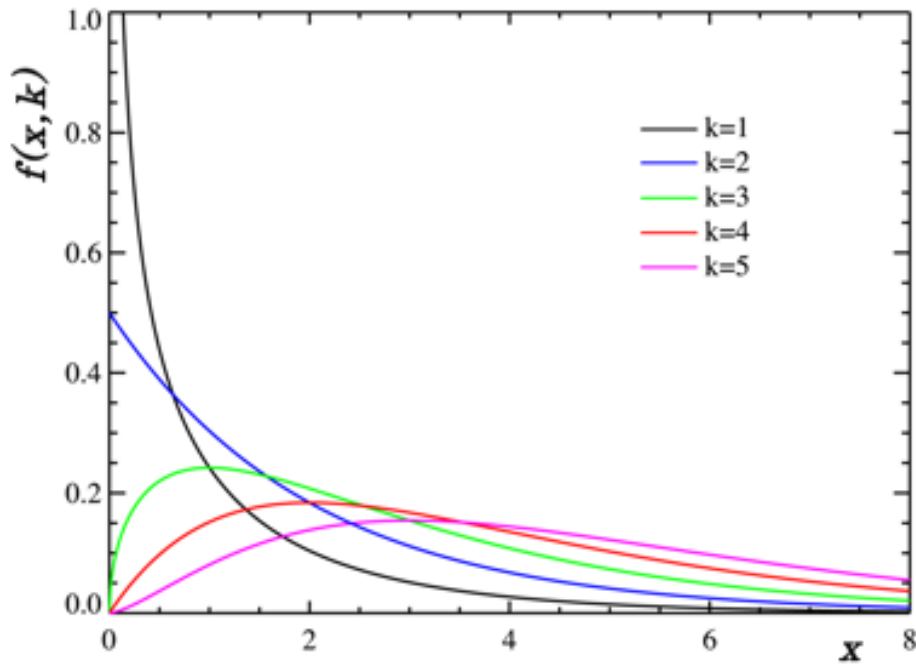


図 3.3:  $\chi^2$ 分布:  $f(x, k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{(k/2)-1}e^{-x/2}$   $k = 1 \sim 5$

値としてほしい  $\sigma^2$  くらいのあたいをとらずであるから、 $\chi^2 \sim 1$  となることが予想される。図 3.4 からわかるように  $k$  が増えるにつれて  $\chi^2 \sim k$  で収束する。 $\chi^2$  分布は自由度が上がるにつれて平均値  $k$  分散  $2k$  を持ったガウス分布に近づくことが知られている。故に、サンプルの無作為性として、 $k$  が充分大きいときに限り  $k \pm \sqrt{2k}$  が全体のうち 68.2% を占める時を妥当性の目安とすることができる。

$\chi^2$  分布の立場に立つと (3.20) は (3.23)、 $\chi^2$  分布を与えていることが分かる。つまり、 $\chi^2$  の評価をすることで、理論的に予想された分布と観測された分布を比較する手段を与える。 $\chi^2$  が自由度  $k$  の程度ならば理論分布はおおむね正しいと言える。見通しをよくするために  $\chi^2$  を自由度で割った値、 $\tilde{\chi}^2$  を次のように定義する。

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{k} \quad (3.26)$$

このように  $\tilde{\chi}^2$  を定義しておけば、 $\sigma = \sqrt{2/k}$  の精度で分布が正しいとき  $\chi^2 \sim 1$  となる。

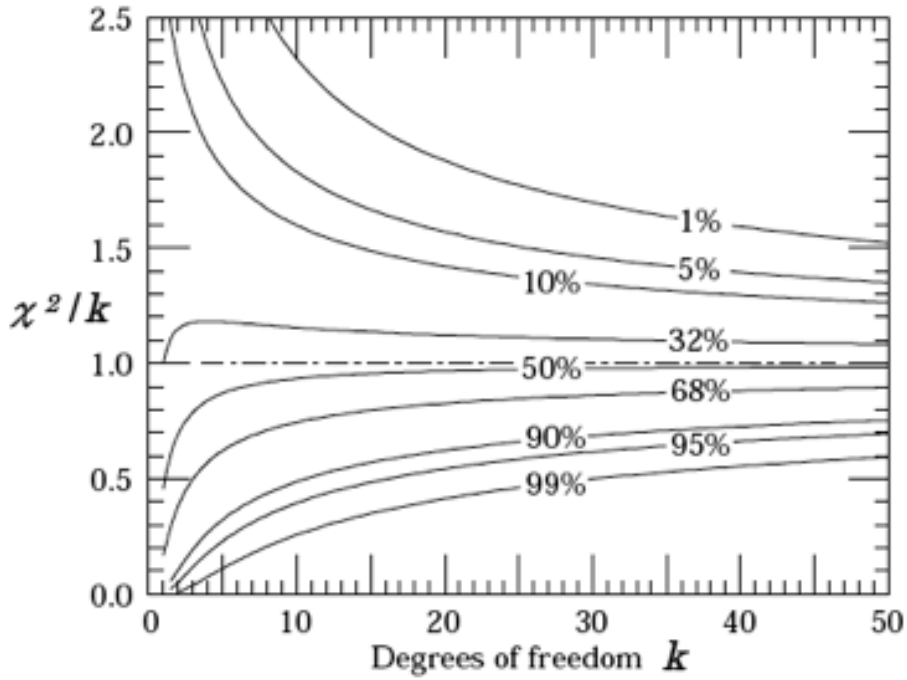


図 3.4: 自由度の関数としての  $\chi^2$  分布の信頼水準

### 3.4.3 誤差の扱い

本研究では  $\chi^2$  検定を、CERN ライブラリーの中の *MINUIT*[32] を基に行った。通常、 $\chi^2$  は統計誤差と系統誤差は同じように振る舞うとして扱い、

$$\chi^2(a_j) \equiv \sum_i^n \frac{(x_i - F(a_j))^2}{\sigma_{i,\text{stat}}^2 + \sigma_{i,\text{syst}}^2} \quad (3.27)$$

で表される。 $\sigma_{i,\text{stat}}$  は統計誤差、 $\sigma_{i,\text{syst}}$  は系統誤差である。

破砕関数を扱う場合、いくつかの実験では従来の統計誤差、系統誤差に加え、不整合誤差を結果に示しているものもある。そのため、破砕関数の誤差を決定するには、不整合誤差の扱いについても考えなければならない。不整合誤差は独立に扱うことができず、相関を持った誤差として扱わねばならない。そのため本研究では  $\chi^2$  として次の形で定義されたものを採用する。

$$\chi^2(a_j, s_l) \equiv \sum_l^{N_E} \sum_i^{N_l} \frac{(y_i - F'(a_j))^2}{\sigma_{i,\text{stat}}^2 + \sigma_{i,\text{syst}}^2} + \sum_l^{N_E} s_l^2 \quad (3.28)$$

$$F'(a_j) \equiv F(a_j)(1.0 + s_l \Delta_l) \quad (3.29)$$

ここで、和  $\sum_l$  は種々の実験 ( $N_E$ ) に対して、 $\sum_i$  は種々の実験データ ( $N_l$ ) に対して取る。 $\Delta_l$  はそれぞれの実験で与えられるスケール不整合である。 $s_l$  は不整合誤差の寄与をコントロールするパラメータで、フィッティングにより最適化される。(3.29) から明らかなように、相関を持たない誤差に関してはガウス分布を仮定している。標準偏差  $\Delta_l$  についても同様である。(3.29) より、 $s_l$  は平均値 0 を持ち、標準偏差として 1 を持つ。

$\chi^2$  の具体的な評価は、Hessian 法とラグランジュの未定乗数法によって行った。本節の残りでは Hessian 法とラグランジュの未定乗数法について説明する。

### 3.4.4 Hessian 法

パラメータ  $a_j$  がいくつかあるとき、異なる  $a_j$  の間の関係を考えたい。(3.22) で求められた  $\chi^2$  の最小値を  $\chi_0^2$ 、最小値を与えるパラメータ  $a_j$  の値を  $a_{0,j}$  とする。(3.20) から明らかなように、 $\chi^2$  は  $a_j$  の関数なので、 $\hat{a}_j = a_j - a_{0,j}$  のまわりで  $\chi^2$  を展開すると、

$$\begin{aligned} \Delta\chi^2 &= \chi^2 - \chi_0^2 \\ &= \hat{a}_i \cdot \nabla_i \chi^2|_{a_j=a_{0,j}} + \frac{1}{2!} (\hat{a}_i \cdot \nabla_i)^2 \chi^2|_{a_j=a_{0,j}} + O(\hat{a}_i^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\simeq \hat{a}_i \hat{a}_j \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_j} \Big|_{a_j=a_{0,j}} \quad (3.31)$$

$\nabla_i$  は  $a_i$  に関する偏微分である。(3.30) の第二項に関しては  $\chi_0^2$  で最小値を取ることから落とした。高次の項  $O(\hat{a}_i^2)$  は最小値付近では無視できると仮定する。(3.31) から次の行列を得る。

$$H_{i,j} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \chi^2 \Big|_{a_j=a_{0,j}} \quad (3.32)$$

$H_{i,j}$  を Hessian 行列<sup>1</sup> と言う。Hessian 行列の逆行列として  $(U^{-1})_{ij} \equiv H_{i,j}$  を考えると、 $U_{i,j}$  は誤差行列の役割をする。このことは  $a_j$  の統計モーメント  $E$  をとることで確認できる。[33]。誤差行列  $U_{i,j}$  を標準分散  $\sigma_i^2 = E[(a_j - a_{0,j})^2]$  と共分散  $\text{cov}(\hat{a}_i, \hat{a}_j) = E[(a_j - a_{0,j})(a_j - a_{0,j})]$  を用いて表せば、

$$U = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(a_1, a_2) & \text{cov}(a_1, a_3) & \cdots \\ & \sigma_2^2 & \text{cov}(a_2, a_3) & \cdots \\ & & \sigma_3^2 & \cdots \\ & & & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

したがって、 $\chi^2$  の最小値付近での振る舞いを決定する  $U_{i,j}$  によって  $a_j$  の振る舞いを考えることができる。 $\Delta\chi^2 > 0$  なので、 $\chi^2$  は多次元放物面となる。図 3.5 に最小値付近で

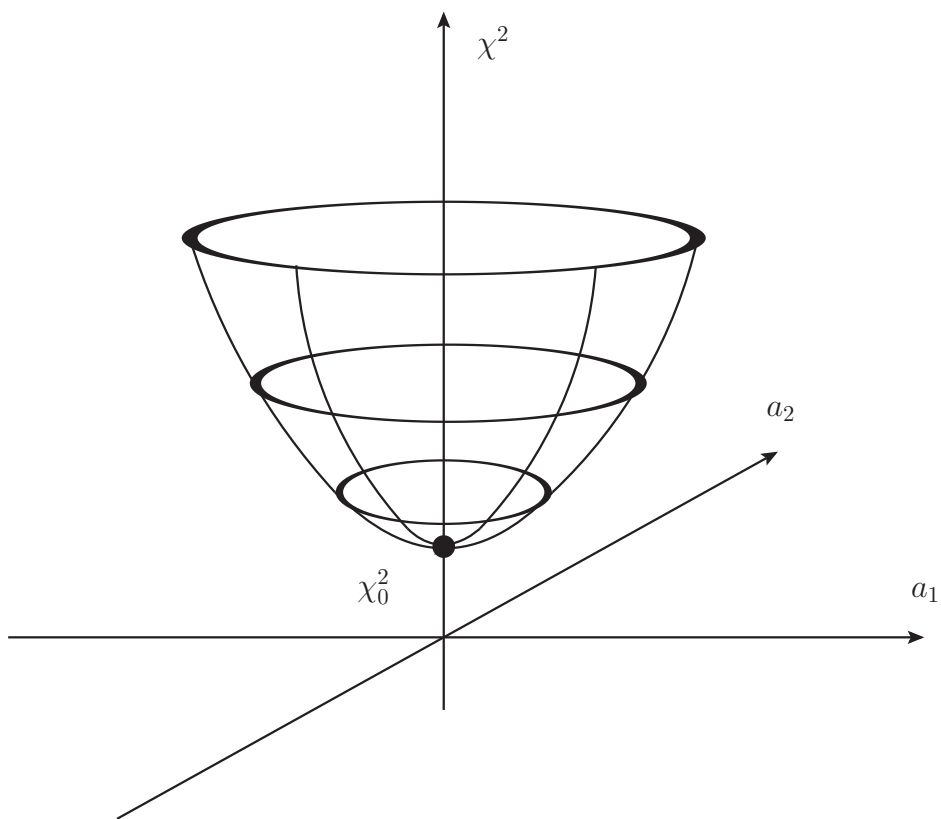


図 3.5: 最小値  $\chi_0^2$  付近の  $\chi^2$  面

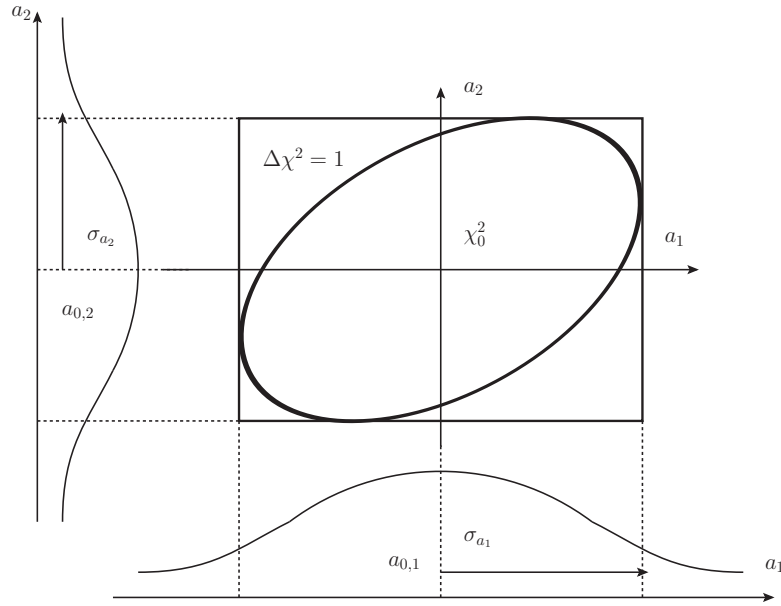


図 3.6:  $\Delta\chi^2 = 1$  で切り取られる  $\chi^2$  曲面の切り口のパラメータ平面への投影

の  $\chi^2$  の振る舞いを示す。(3.32) は誤差行列の各要素を  $\Delta\chi^2 = 1$  面での断面として与える(図 3.6)。切り取られた断面を図 3.6 のように  $1\sigma_j$  で接するように規格化しておけば、相関の強さを視覚的に扱うことができる。つまり、相関が強ければ、断面は細長い楕円になり、相関が弱ければ断面は円に近くなる。

誤差行列を対角化し、固有値、固有ベクトルを求めておくパラメータ間の相関を考えずに独立に扱うため誤差を評価する際、便宜がいい。誤差行列は対称行列なので、次で定義される直交固有ベクトルをもつ。

$$\sum_{j=1}^n U_{ij} v_{jk} = \lambda_k v_{ik} \quad (3.34)$$

ここで、 $\lambda_k$  は  $k$  番目の固有値、 $v_{ik}$  は  $k$  番目の固有ベクトルの  $i$  番目の要素である。

$U_{i,j}$  を求めることができれば、パラメータ  $a_j$  を変数に持つ値  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{a})$  を見積もることができる。 $A, B$  の分散  $\sigma_A, \sigma_B$  および共分散  $\text{cov}(A, B)$  は、

$$\sigma_A^2 = U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_i} \frac{\partial A}{\partial a_j}, \quad \sigma_B^2 = U_{i,j} \frac{\partial B}{\partial a_i} \frac{\partial B}{\partial a_j} \quad (3.35)$$

$$\text{cov}(A, B) = U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_i} \frac{\partial B}{\partial a_j} \quad (3.36)$$

ここで偏微分は  $a_j = a_{0,j}$  での値を取る。

<sup>1</sup> $H$  の定義に  $1/2$  を含めるのは高エネルギー物理の習慣である

$\Delta\chi^2 = 1$  の多次元面と固有ベクトルは *MINUIT* パッケージの中の *HESSE* 法によって計算される。

Hessian 法では誤差を視覚的に扱えるという利点もあるが、最小値付近では高次の項  $O(\hat{a}_j)$  が無視できると仮定して、(3.31) を導いたことに気をつけねばならない。この仮定は誤差が真の値とかけ離れている場合無視できなくなる。そこで、仮定を置くことなく、誤差を直接扱う方法としてラグランジュの未定乗数法を次に説明する。

### 3.4.5 ラグランジュの未定乗数法

より直接的に誤差を評価する方法として、ラグランジュの未定乗数法 [5] がある。パラメータ  $a_j$  から構成される観測量  $A(a_j)$  を考える。 $\chi^2$  を最小にする  $a_j$  の値を  $a_{0,j}$  とし、次のような  $\Phi$  を考える。

$$\Phi(a_j, \lambda) = \chi^2(a_j) + \lambda A(a_j) \quad (3.37)$$

$\lambda$  はラグランジュの未定乗数と呼ばれる量で、 $\lambda$  を固定したとき  $\Phi$  を最小にする  $a_j \equiv a_{\lambda,j}$  を探し、 $\chi^2(a_{\lambda,j})$  と  $A(a_{\lambda,j})$  の組を計算するために導入するパラメータである。ここで、 $a_{\lambda,j} \neq a_{0,j}$  であることに注意する。いくつかの  $\lambda$  について繰り返し計算することで、 $[\chi^2(a_{\lambda,j}), A(a_{\lambda,j})]$  の組をいくつも求めることができ、曲線を描くことができる。 $\lambda$  は曲線を得るためのパラメータで物理的な意味は持たない。 $\lambda$  の範囲は試行錯誤して決めることもできるが、Hessian 法を使えば、 $\lambda \approx 2\Delta\chi^2/\Delta A$  であることがわかるので、これを利用していい。

ラグランジュの未定乗数法には Hessian 法と違い、仮定なしに誤差を扱えることに利点がある。しかし、観測量  $A$  にたいしてそれぞれ計算しなければならないため計算に時間がかかるという欠点もある。

ラグランジュの未定乗数法で得られる曲線について理解を深めるために、次の解析的な問題を考えてみたい。以下では分散を示す記号  $\hat{\phantom{x}}$  は省略する。定数  $C$  があつたとき、 $A^2(a_{0,i}) = C$  となる最小の  $\chi^2$  を求める問題を考える。そのために次の量を導入する。

$$\phi(a_i, \lambda) = \Delta\chi^2(a_i) + \lambda(A^2(a_i) - C) \quad (3.38)$$

$\phi$  を最小にするには、

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \phi(a_i, \lambda) = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi(a_i, \lambda) = 0 \quad (3.40)$$

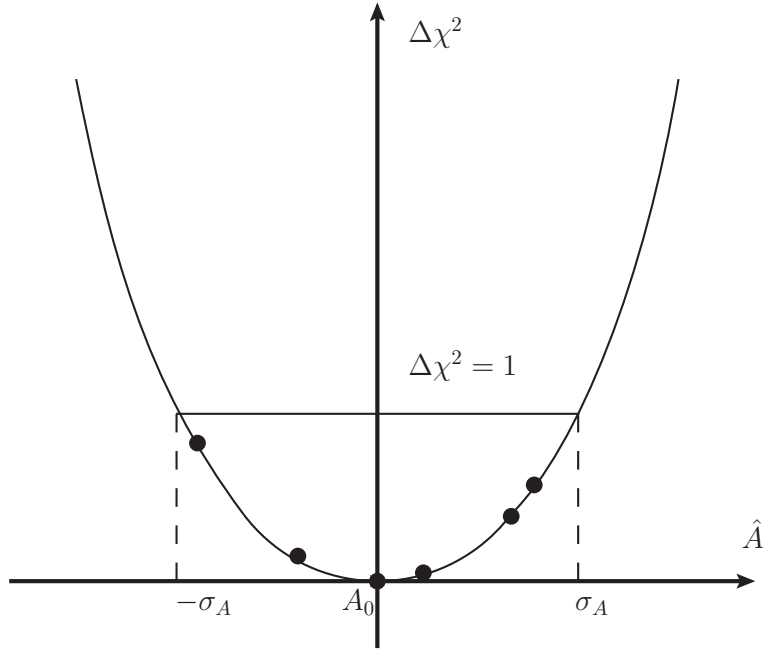


図 3.7: ラグランジュの未定乗数法 of 概念図

• がラグランジュの未定乗数法で計算して得られる点。曲線は Hessian 法。

(3.31) を使えば、(3.39),(3.40) はそれぞれ、

$$U_{i,j}^{-1} a_j + \lambda A \frac{\partial A}{\partial a_i} = 0 \quad (3.41)$$

$$A^2(a_i) = C \quad (3.42)$$

となる。  $U_{i,j} U_{j,k}^{-1} = \delta_{i,k}$  を使えば、

$$a_i = -\lambda A U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_j} \quad (3.43)$$

従って、

$$\begin{aligned} \Delta\chi^2 &= a_i U_{i,j}^{-1} a_j = (\lambda A)^2 a_k U_{k,i}^T U_{i,j}^{-1} U_{j,l} a_l \\ &= (\lambda A)^2 \frac{\partial A}{\partial a_i} U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_j} \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.43) を使えば、

$$a_i \frac{\partial A}{\partial a_i} = \lambda A \frac{\partial A}{\partial a_i} U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_j} \quad (3.45)$$

故に  $\Delta\chi^2$  は、

$$\Delta\chi^2 = \left( a_i \frac{\partial A}{\partial a_i} \right)^2 \bigg/ \left( \frac{\partial A}{\partial a_i} U_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_j} \right) \quad (3.46)$$

(3.35) から最小値のまわりでは、

$$\hat{A} \simeq \hat{a}_i \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{a}_i} \Big|_{\hat{a}_j=0} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{a}_i} \Big|_{a_j=a_{0,j}} \quad (3.47)$$

以上から  $\Delta\chi^2$  は  $\hat{A}$  のみで表すことができ、

$$\Delta\chi^2(\hat{A}^2) = \frac{\hat{A}^2}{\sigma_A^2} \quad (3.48)$$

(3.42) を思い出せば、上の結果は  $\Delta\chi^2$  が  $A$  の関数で放物線を描くことを示している (図 3.7)。したがって、異なる  $\lambda$  に対して (3.38) の最小値を求めること (ラグランジュ未定乗数法を実行すること) は、 $\Delta\chi^2$  の  $\Delta\chi^2 - \hat{A}$  平面への射影を求めることと言える。 $\Delta\chi^2 = 1$  は  $A$  の分散  $\sigma_A$  を与える。同様に、(3.37) にたいしてラグランジュの未定乗数法を適用することは、 $\chi^2$  の  $\chi^2 - A$  平面への射影を得ることと解釈できる。なお式 (3.48) を得るために仮定 (3.31) を使っていることに注意されたい。仮定 (3.31) を使ったために、 $\Delta\chi^2$  が  $\hat{A}$  の二次関数であるという結果が得られたが、仮定なしにラグランジュの未定乗数法を行えば、 $\Delta\chi^2$  は  $\hat{A}$  の二次曲線からずれていくことを申し添えておく。

### 3.4.6 許容変位

パラメータをフィットする際、許容変位  $T = (\Delta\chi^2)^{1/2} = 1$  が与えられれば、 $1\sigma$  (68 %) の信頼水準で誤差が求められると期待される。90% の信頼水準で誤差を求めたいのなら  $T^2 = 2.71$  である。しかし、このように扱えるのは実験データがお互いに首尾一貫し、矛盾がない場合である。実際には実験データ間に不一致がある場合や、知られていない理論的な誤差、実験的な誤差が含まれている場合があるため、許容変位に対しても誤差を見積もってやる必要がある。この問題に対する一つの解決策は互いに矛盾がない実験データを使って解析を行うことである。しかし、実際的な方法とは言い難い。

そこで、ここでは解析に使う実験データから許容変位を見積もる方法を用いる。以下に手順を示す。

1. 誤差行列を対角化して、固有値、固有ベクトルを求める。誤差行列を対角化するのはそれぞれのパラメータを独立に扱いたいがためである。
2. ラグランジュの未定乗数法を用いて  $\Delta\chi^2$  の各固有値ごとの振る舞いをみる。
3. 2. を各実験のサブセットごとに分解する。
4. 3. 信頼水準 90%, 68% の線を引く。信頼水準の線は、

$$\chi_n^2 < \left( \frac{\chi_{n,0}^2}{\xi_{50}} \right) \xi_{90} \quad (3.49)$$



で求められる。ここで、 $\xi_{90}$  は因子、 $\chi_{n,0}^2/\xi_{50}$  によって規格化されていることに留意する。 $\chi_n^2$  が  $\xi_{90}$  に比べてかなり離れている場合にこのような規格化が必要になってくる。

5. 図から  $\chi_n^2$  が最小となる距離  $(\Delta\chi^2)^{1/2}$ 、信頼水準 68%,90%を与える距離をそれぞれもとめて実験データごとに書き出した図がである。この図をもとにどの実験が信頼水準を与える距離としてもっとも厳しい基準を与えるかを各固有値ごとに求める。
6. 図にまとめてあるのは各固有値ごとにどの実験がもっともシビアな制限を加えるかである。

memo—— 図を載つけて item は各図に対応させる

4. から許容変位が持つべき誤差を評価する。

この誤差の評価方法では、誤差行列を用いるため高次の誤差を無視する仮定 (3.31) の枠内で考えている。

memo——quadratic or not で誤差の意味が違うこと書く

## 3.5 解析手順

### 1. 初期条件の入力

本解析では初期関数として、(3.8) を採用したが、本フレームワークで扱える初期入力関数の形には自由度があり、原理的には任意の関数形を初期入力関数として扱える。

### 2. Mellin 変換

Mellin 変換 (3.1) を用いて Mellin 空間で計算を行うことで、積分を積へと変換でき、計算が簡単になる (3.2)。

### 3. $Q^2$ 発展

初期エネルギー  $\mu_{0,F}$  で与えられた分布関数が DGLAP 方程式によって任意のスケール  $\mu_F$  に発展される。

### 4. 観測量の構成

係数関数によって破碎関数から高エネルギー過程が構成され、構造関数等の観測量が作られる (Mellin 空間上)。

### 5. 逆 Mellin 変換

Mellin 空間から実空間に変換される。

## 6. 実験データとのフィッティング

実験データの分散および対応する計算量が *MINUIT* アルゴリズムによって提供される  $\chi^2$  フィッティングによって最小化される。

## 7. 誤差評価

誤差の評価は Hessian 法によりパラメータ間の相関を扱い、Hessian 法、ラグランジュの未定乗数法を組み合わせることで許容変位の評価を行う。

### ★ Hessian 法

$\Delta\chi^2$  の高次の項が最小値付近で無視できると仮定し、 $\Delta\chi^2 = 1$  での断面を見ることで誤差を評価する。

### ★ 許容変位の評価

## 初期関数形

$$D_q^H(z, \mu_F^2) = \frac{\eta z^\alpha (1-z)^\beta}{B(\alpha+2, \beta+1)}$$

$\eta, \alpha, \beta$  が決めるべきパラメータ

:初期関数形には  
自由度がある

Mellin変換

$$f(n) = \int_0^1 dz z^{n-1} f(z)$$

$Q^2$  発展

DGLAP方程式  $\frac{\partial q}{\partial t} = \gamma \cdot q$

観測量の構成

$$F(N, M, ...) \sim \sum_{q, q', \dots} C(N < M, \dots) q(N) \cdot q'(M) \dots$$

逆Mellin変換

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0-i\infty}^{C_0+i\infty} dn z^{-n} f(n)$$

Mellin空間

$\chi^2$  検定



実験データとのフィッティング

図 3.8: 解析手順

# 第4章 解析結果

## 4.1 破砕関数

### 4.1.1 $\pi$ 中間子の破砕関数

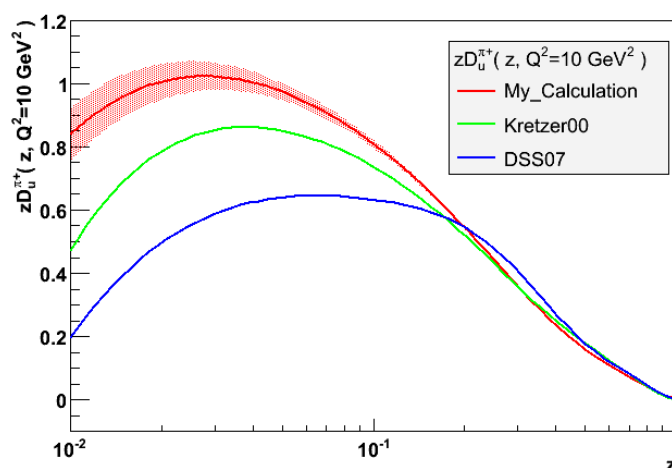


図 4.1: 10 GeV で与えられた時の  $u$  クォークから  $\pi^+$  への破砕関数 (favored)。Kretzer00 [3], DSS07 [4] と比較してある。

name	$N$	$a$	$b$	$c$	$d$
gluon	$0.2464 \pm 0.01332$	$1.444 \pm 0.5033$	$4.292 \pm 0.862$	18.36 (fixed)	6.337 (fixed)
u	$0.2922 \pm 0.01701$	$-0.8229 \pm 0.1077$	$2.573 \pm 0.1471$		
d	$0.1421 \pm 0.02511$	$-1.238 \pm 0.1876$	$1.947 \pm 0.2803$		
c	$0.1789 \pm 0.02277$	$-1.247 \pm 0.1876$	$2.421 \pm 0.574$		
b	$0.2093 \pm 0.01329$	$-1.005 \pm 0.1346$	$7.913 \pm 0.8872$		

表 4.1: フィッティングの結果

図 4.2: 10 GeV で与えられた時の  $d$  クォークから  $\pi^+$  への破砕関数 (dis-favored)。Kretzer00 [3], DSS07 [4] と比較してある。

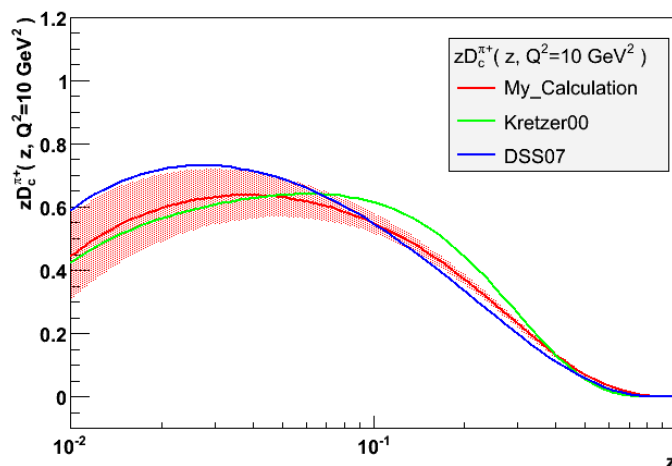


図 4.3: 10 GeV で与えられた時の  $c$  クォークから  $\pi^+$  への破砕関数 (favored)。Kretzer00 [3], DSS07 [4] と比較してある。

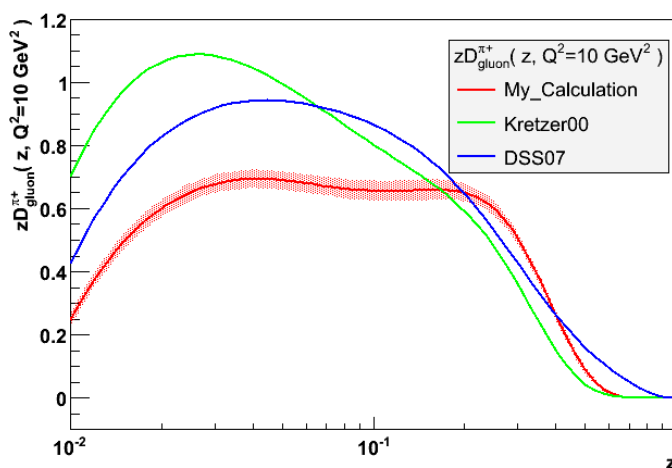


図 4.4: 10 GeV で与えられた時のグルーオンから  $\pi^+$  への破砕関数 (favored)。Kretzer00 [3], DSS07 [4] と比較してある。

## 4.2 誤差の評価

### 4.2.1 $\pi$ 中間子の破碎関数

# Correlation Hist

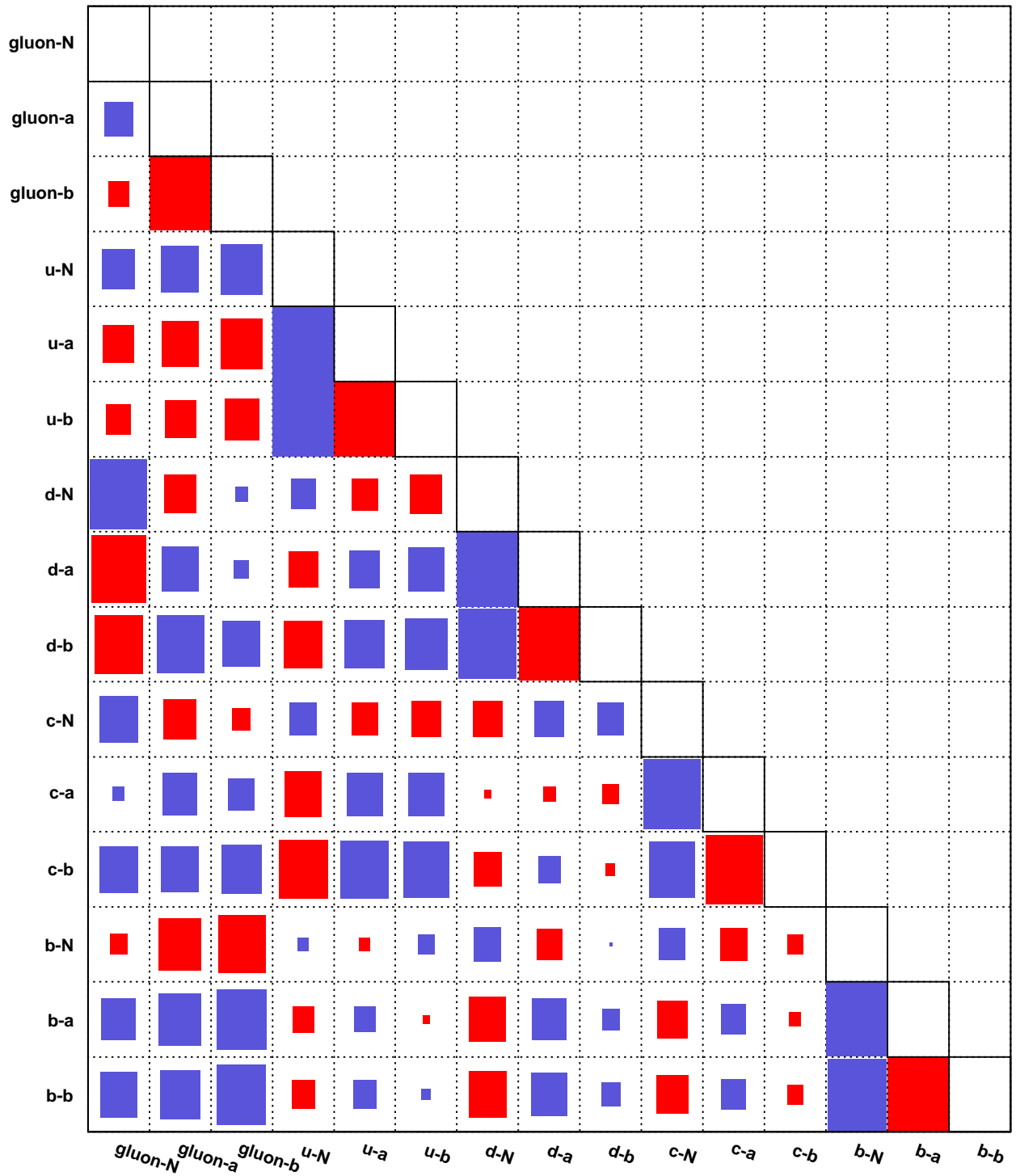


図 4.5: 誤差の相関

## 第5章 結論



# 付録 A 分割関数

ここでは、本解析に用いた分割関数を  $x$  空間、Mellin 空間双方で記述する。  
分割関数は次のように摂動展開される。

$$P(x, \alpha_s) = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) P^{(0)}(x) + \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 P^{(1)}(x) + \dots \quad (\text{A.1})$$

分割関数を Mellin 変換した際の異常次元は、

$$\int_0^1 dx x^{N-1} P(x, \alpha_s) = -\frac{1}{2}\gamma(N, \alpha_s), \quad (\text{A.2})$$

で定義されている。

## A.1 非偏極空間様分割関数

非偏極空間様分割関数はパートン分布関数の計算に用いられる。非偏極空間様分割関数  $P(x, \alpha_s)$  は LO で、

$$P_{NS}^{+(0)}(x) = P_{NS}^{-(0)}(x) = P_{qq}^{(0)}(x) = 2C_F \left( \frac{2}{(1-x)_+} - 1 - x + \frac{3}{2}\delta(1-x) \right) \quad (\text{A.3})$$

$$P_{gg}^{(0)}(x) = 4T_f (x^2 + (1-x)^2) \quad (\text{A.4})$$

$$P_{gq}^{(0)}(x) = 2C_F \left( \frac{1 + (1-x)^2}{x} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$P_{gg}^{(0)}(x) = 4N_C \left( \frac{1}{(1-x)_+} + \frac{1}{x} - 2 + x - x^2 \right) + \left( \frac{11}{3}N_C - \frac{4}{3}T_f \right) \delta(1-x), \quad (\text{A.6})$$

+関数は積分範囲が  $0 \leq x \leq 1$  で次のように定義される。

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (\text{A.7})$$

対応する異常次元は

$$\gamma_{NS}^{+(0)}(n) = \gamma_{NS}^{-}(0)(n) = \gamma_{qq}^{(0)}(n) = C_F \left( 3 + \frac{2}{n(n+1)} - 4S_1(n) \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_{qg}^{(0)}(n) = 4T_f \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)} \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_{gq}^{(0)}(n) = 2C_F \frac{n^2 + n + 2}{(n-1)n(n+1)} \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_{gg}^{(0)}(n) = N_C \left( \frac{11}{3} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} - 4S_1(n) \right) - \frac{4}{3}T_f, \quad (\text{A.11})$$

NLO の表現に関しては  $x$  空間の結果は [34, 35] を本解析で用いた Mellin 空間での表現に関しては [34] を参照されたし。

## A.2 非偏極時間様分割関数

非偏極時間様分割関数は破砕関数の計算に用いられる。非偏極時間様分割関数は  $P^T(x, \alpha_s)$  は LO で

$$\begin{aligned} P_{NS}^{T,+}(0)(x) &= P_{NS}^{T,-}(0)(x) = P_{qq}^{T,(0)}(x) \\ &= P_{qq}^{(0)}(x) = 2C_F \left( \frac{2}{(1-x)_+} - 1 - x + \frac{3}{2}\delta(1-x) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$P_{qg}^{T,(0)}(x) = 4n_f C_F \left( \frac{1 + (1-x)^2}{x} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$P_{gq}^{T,(0)}(x) = 2T_R (x^2 + (1-x)^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} P_{gg}^{T,(0)}(x) &= P_{gg}^{(0)}(x) \\ &= 4N_C \left( \frac{1}{(1-x)_+} + \frac{1}{x} - 2 + x - x^2 \right) + \left( \frac{11}{3}N_C - \frac{4}{3}T_f \right) \delta(1-x). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

対応する異常次元は空間様分割関数の場合を用いて、

$$\gamma_{NS}^{T,+}(0)(n) = \gamma_{NS}^{T,-}(0)(n) = \gamma_{qq}^{T,(0)}(n) = \gamma_{qq}^{(0)}(n) \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_{qg}^{T,(0)}(n) = 2n_f \gamma_{qg}^{(0)}(n) \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma_{gq}^{(0)}(n) = (2n_f)^{-1} \gamma_{qg}^{(0)}(n) \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{gg}^{T,(0)}(n) = \gamma_{qq}^{(0)}(n). \quad (\text{A.19})$$

で表される。

NLO の表現に関しては  $x$  空間の結果は [36, 37] 本解析で用いた Mellin 空間での表現に関しては [36] を参照されたし。

## 付録B 係数関数

解析に用いた係数関数を記述する。

係数関数の摂動展開は

$$C(x, \alpha_s, Q^2/\mu_F^2) = C^{(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) C^{(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) + \dots \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。係数関数は解析的、数値的に Mellin 空間へ変換される。

### B.1 深非弾性散乱

$x$  空間での深非弾性散乱の係数関数は [38]

$$C_q^{1,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = \delta(1-x) \quad (\text{B.2})$$

$$C_g^{1,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = C_q^{L,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = C_g^{L,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} C_q^{1,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = & C_F \left[ (1+x^2) \left[ \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right]_+ - \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{1-x} \right]_+ - \frac{1+x^2}{1-x} \ln x \right. \\ & \left. + 3 - \left( \frac{1}{3}\pi^2 + \frac{9}{2} \right) \delta(1-x) \right] + C_F \left[ \frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} C_g^{1,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = & T_R \left[ (1-2x+2x^2) \ln \left( \frac{1-x}{x} \right) - (2x-1)^2 \right] \\ & + T_R (x^2 + (1-x)^2) \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$C_q^{L,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 2C_F x \quad (\text{B.6})$$

$$C_g^{L,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 4T_R x(1-x), \quad (\text{B.7})$$

で与えられる。 $\mu_F$  は因子化スケールで  $Q$  のあたりで任意に選択される。

Mellin 空間での関数は関数  $S_k(n)$  を用いて (??)[39]

$$C_q^{1,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 1 \quad (\text{B.8})$$

$$C_g^{1,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = C_q^{L,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = C_g^{L,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} C_q^{1,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) &= C_F \left[ S_1^2(n) - S_2(n) + S_1(n) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{9}{2} \right] \\ &\quad + C_F \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2S_1(n) \right) \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} C_g^{1,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) &= T_R \left[ -\frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)}(1+S_1(n)) + \frac{1}{n^2} \right] \\ &\quad + T_R \frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)} \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$C_q^{L,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 2C_F \frac{1}{n+1} \quad (\text{B.12})$$

$$C_g^{L,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 4T_R \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \quad (\text{B.13})$$

## B.2 準深非弾性散乱

準深非弾性散乱での係数関数を示す。ここでは  $q \rightarrow q$  部分だけを示す。( $q \rightarrow g$  or  $g \rightarrow q$ ) については参照されたし。

$x$  空間での  $C_{qq}(x, z, Q^2/\mu_F^2, Q^2/\mu_F'^2)$  にたいしては [40]

$$C_{qq}^{1,(0)} = \delta(1-x) \delta(1-z) \quad (\text{B.14})$$

$$C_{qq}^{L,(0)} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} C_{qq}^{1,(1)} &= C_F \left[ -8\delta(1-x) \delta(1-z) \right. \\ &\quad + \delta(1-x) \left( \left[ \frac{1+z^2}{1-z} \right]_+ \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} + L_1(z) + L_2(z) + (1-z) \right) \\ &\quad + \delta(1-z) \left( \left[ \frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} + L_1(x) - L_2(x) + (1-x) \right) + 2(1+xz) \\ &\quad \left. + 2 \left[ \frac{1}{1-x} \right]_+ \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ - (1+z) \left[ \frac{1}{1-x} \right]_+ - (1+x) \left[ \frac{1}{1-z} \right]_+ \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$C_{qq}^{L,(1)} = 4C_F xz, \quad (\text{B.17})$$

ここで  $L_1, L_2$  については

$$L_1(\xi) \equiv (1+\xi^2) \left[ \frac{\ln(1-\xi)}{1-\xi} \right]_+ \quad (\text{B.18})$$

$$L_2(\xi) \equiv \frac{1+\xi^2}{1-\xi} \ln \xi, \quad (\text{B.19})$$

である。 $\mu_F, \mu'_F$  についてはそれぞれパートン分布関数、破砕関数に対応する因子化のスケールである。

Mellin 変換を行った形では  $C_{qq}(n, m, Q^2/\mu_F^2, Q^2/\mu'_F{}^2)$ [41] はつぎのように表される。

$$C_{qq}^{1,(0)} = 1 \quad (\text{B.20})$$

$$C_{qq}^{L,(0)} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} C_{qq}^{1,(1)} = C_F & \left[ -8 - \frac{1}{m^2} + \frac{2}{(m+1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{(1+m+n)^2 + 1}{m(m+1)n(n+1)} + 3S_2(m) \right. \\ & \left. - 2S_2(n) + (S_1(m) + S_1(n)) \left( S_1(m) + S_1(n) - \frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right] \\ & + C_F \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2S_1(n) \right) \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \\ & + C_F \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{m(m+1)} - 2S_1(m) \right) \ln \frac{Q^2}{\mu'_F{}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$C_{qq}^{L,(1)} = C_F \frac{4}{(n+1)(m+1)}. \quad (\text{B.23})$$

### B.3 電子・陽電子対消滅

電子・陽電子対消滅に関する係数関数は  $x$  空間で次のようになる [3]。

$$C_q^{1,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = \delta(1-x) \quad (\text{B.24})$$

$$C_g^{1,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = C_q^{L,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = C_g^{L,(0)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} c_q^{1,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = (1+x^2) & \left[ \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right]_+ - \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{1-x} \right]_+ + 2 \frac{1+x^2}{1-x} \ln x \\ & + \frac{3}{2}(1-x) + \left( \frac{3}{2}\pi^2 - \frac{9}{2} \right) \delta(1-x) + \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \left[ \frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$c_g^{1,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = \frac{1+(1-x)^2}{x} \left( \ln(1-x) + 2\ln x + \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right) - 2 \frac{1-x}{x} \quad (\text{B.27})$$

$$c_q^{L,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 1 \quad (\text{B.28})$$

$$c_g^{L,(1)}(x, Q^2/\mu_F^2) = 2 \frac{1-x}{x}, \quad (\text{B.29})$$

Mellin 空間では [3]

$$C_q^{1,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 1 \quad (\text{B.30})$$

$$C_g^{1,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = C_q^{L,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = C_g^{L,(0)}(n, Q^2/\mu_F^2) = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} c_q^{1,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) &= 5S_2(n) + S_1^2(n) + S_1(n) \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{(n+1)^2} \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{1}{n+1} - \frac{9}{2} + \left[ \frac{1}{n(n+1)} - 2S_1(n) + \frac{3}{2} \right] \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} c_g^{1,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) &= \left[ -S_1(n) \frac{n^2 + n + 2}{(n-1)n(n+1)} - \frac{4}{(n-1)^2} + \frac{4}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2} \right] \\ &\quad + \frac{n^2 + n + 2}{(n-1)n(n+1)} \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$c_q^{L,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) = \frac{1}{n} \quad (\text{B.34})$$

$$c_g^{L,(1)}(n, Q^2/\mu_F^2) = \frac{2}{(n-1)n}. \quad (\text{B.35})$$

である。

## 関連図書

- [1] J. Ashman, et al. An investigation of the spin structure of the proton in deep inelastic scattering of polarized muons on polarized protons. *Nucl. Phys.*, Vol. B328, p. 1, 1989.
- [2] P. L. Anthony, et al. Measurements of the  $Q^{*2}$  dependence of the proton and neutron spin structure functions  $g_1(p)$  and  $g_1(n)$ . *Phys. Lett.*, Vol. B493, pp. 19–28, 2000.
- [3] S. Kretzer. Fragmentation functions from flavour-inclusive and flavour-tagged  $e^+ e^-$  annihilations. *Phys. Rev.*, Vol. D62, p. 054001, 2000.
- [4] Daniel de Florian, Rodolfo Sassot, and Marco Stratmann. Global analysis of fragmentation functions for pions and kaons and their uncertainties. *Phys. Rev.*, Vol. D75, p. 114010, 2007.
- [5] J. Pumplin, D. R. Stump, and W. K. Tung. Multivariate fitting and the error matrix in global analysis of data. *Phys. Rev. D*, Vol. 65, No. 1, p. 014011, Dec 2001.
- [6] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne, and G. Watt. Parton distributions for the LHC. *Eur. Phys. J.*, Vol. C63, pp. 189–285, 2009.
- [7] J. D. Bjorken. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Phys. Rev.*, Vol. 179, pp. 1547–1553, 1969.
- [8] Jerome I. Friedman and Henry W. Kendall. Deep inelastic electron scattering. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Vol. 22, pp. 203–254, 1972.
- [9] Curtis G. Callan, Jr. and David J. Gross. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 22, pp. 156–159, 1969.
- [10] R. Schwitters, et al. Azimuthal Asymmetry in Inclusive Hadron Production by  $e^+ e^-$  Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 35, p. 1320, 1975.

- [11] G. Hanson, et al. Evidence for Jet Structure in Hadron Production by  $e^+ e^-$  Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 35, pp. 1609–1612, 1975.
- [12] P. Nason and B. R. Webber. Scaling violation in  $e^+ e^-$  fragmentation functions: QCD evolution, hadronization and heavy quark mass effects. *Nucl. Phys.*, Vol. B421, pp. 473–517, 1994.
- [13] Guido Altarelli and G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, Vol. B126, p. 298, 1977.
- [14] V. N. Gribov and L. N. Lipatov. Deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, Vol. 15, pp. 438–450, 1972.
- [15] V. N. Gribov and L. N. Lipatov.  $e^+ e^-$  pair annihilation and deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, Vol. 15, pp. 675–684, 1972.
- [16] Yuri L. Dokshitzer. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and  $e^+ e^-$  Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, Vol. 46, pp. 641–653, 1977.
- [17] D. de Florian, G. A. Navarro, and R. Sassot. Sea quark and gluon polarization in the nucleon at NLO accuracy. *Phys. Rev.*, Vol. D71, p. 094018, 2005.
- [18] Daniel de Florian, Rodolfo Sassot, Marco Stratmann, and Werner Vogelsang. Global analysis of helicity parton densities and their uncertainties, 2008.
- [19] W. Braunschweig, et al. Pion, kaon and proton cross-sections in  $e^+ e^-$  annihilation at 34-GeV and 44-GeV center-of-mass energy. *Z. Phys.*, Vol. C42, p. 189, 1989.
- [20] H. Aihara, et al. Charged hadron inclusive cross-sections and fractions in  $e^+e^-$  annihilation  $\sqrt{s} = 29$  GeV. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 61, p. 1263, 1988.
- [21] K. Abe, et al. Production of  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $K^0$ ,  $K^{*0}$ ,  $\Phi$ ,  $p$  and  $\Lambda^0$  in hadronic  $Z^0$  decays. *Phys. Rev.*, Vol. D59, p. 052001, 1999.
- [22] D. Buskulic, et al. Inclusive  $\pi^{+-}$ ,  $K^{+-}$  and  $(p, \text{anti-}p)$  differential cross-sections at the  $Z$  resonance. *Z. Phys.*, Vol. C66, pp. 355–366, 1995.
- [23] R. Akers, et al. Measurement of the production rates of charged hadrons in  $e^+ e^-$  annihilation at the  $Z^0$ . *Z. Phys.*, Vol. C63, pp. 181–196, 1994.



- [24] P. Abreu, et al.  $\pi^{+-}$ ,  $K^{+-}$ ,  $p$  and anti- $p$  production in  $Z^0 \rightarrow q \text{ anti-}q$ ,  $Z^0 \rightarrow b \text{ anti-}b$ ,  $Z^0 \rightarrow u \text{ anti-}u$ ,  $d \text{ anti-}d$ ,  $s \text{ anti-}s$ . *Eur. Phys. J.*, Vol. C5, pp. 585–620, 1998.
- [25] H. Aihara, et al. Inclusive  $\gamma$  and  $\pi^0$  production cross-sections and energy fractions in  $e^+e^-$  annihilation at 29-GeV. *Z. Phys.*, Vol. C27, p. 187, 1985.
- [26] M. Acciarri, et al. Measurement of inclusive production of neutral hadrons from  $Z$  decays. *Phys. Lett.*, Vol. B328, pp. 223–233, 1994.
- [27] R. Barate, et al. Inclusive production of  $\pi^0$ ,  $\eta$ ,  $\eta'(958)$ ,  $K^0(S)$  and  $\Lambda$  in two- and three-jet events from hadronic  $Z$  decays. *Eur. Phys. J.*, Vol. C16, p. 613, 2000.
- [28] K. Ackerstaff, et al. Photon and light meson production in hadronic  $Z^0$  decays. *Eur. Phys. J.*, Vol. C5, pp. 411–437, 1998.
- [29] W. Adam, et al. Measurement of inclusive  $\pi^0$  production in hadronic  $Z^0$  decays. *Z. Phys.*, Vol. C69, pp. 561–574, 1996.
- [30] P. Abreu, et al. Inclusive measurements of the  $K^{+-}$  and  $p / \text{anti-}p$  production in hadronic  $Z^0$  decays. *Nucl. Phys.*, Vol. B444, pp. 3–26, 1995.
- [31] Achim Hillenbrand. Measurement and simulation of the fragmentation process at HERMES. DESY-THESIS-2005-035.
- [32] F. James and M. Roos. Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations. *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 10, pp. 343–367, 1975.
- [33] Harald Cramer. Mathematical methods of statistics. Princeton : Princeton University Press (1946) 575 p.
- [34] E. G. Floratos, C. Kounnas, and R. Lacaze. Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering. *Nucl. Phys.*, Vol. B192, p. 417, 1981.
- [35] R. Keith Ellis and W. Vogelsang. The evolution of parton distributions beyond leading order: the singlet case. 1996.
- [36] M. Gluck, E. Reya, and A. Vogt. Parton fragmentation into photons beyond the leading order. *Phys. Rev.*, Vol. D48, pp. 116–128, 1993. (E) *Phys. Rev.* D51:1427, 1995.

- [37] J. Binnewies, Bernd A. Kniehl, and G. Kramer. Coherent description of  $D^{*+}$ -production in  $e^+ e^-$  and low- $Q^{*2}$   $e p$  collisions. *Z. Phys.*, Vol. C76, pp. 677–688, 1997.
- [38] M. Miyama and S. Kumano. Numerical solution of  $Q^{*2}$  evolution equations in a brute force method. *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 94, pp. 185–215, 1996.
- [39] William A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta. Deep inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. *Phys. Rev.*, Vol. D18, p. 3998, 1978.
- [40] D. de Florian, M. Stratmann, and W. Vogelsang. QCD analysis of unpolarized and polarized Lambda baryon production in leading and next-to-leading order. *Phys. Rev.*, Vol. D57, pp. 5811–5824, 1998.
- [41] Marco Stratmann and Werner Vogelsang. Towards a global analysis of polarized parton distributions. *Phys. Rev.*, Vol. D64, p. 114007, 2001.
- [42] John R. Taylor. 計測における誤差解析入門. 東京化学同人, pp. 1–328, 2000.
- [43] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.