

漸近的自由性と摂動論的量子色力学

小 平 治 郎

1. はじめに

強い相互作用を記述する量子色力学(QCD)は、場の理論の立場からは非可換ゲージ理論と呼ばれる範疇に属する。この理論は「漸近的自由性」と呼ばれる特筆すべき性質を持ち、陽子・中性子などの素粒子(ハドロンと呼ばれる)がクォーク・グルオンから構成されていること、確固たる理論的基盤を与えている。漸近的自由性は、高エネルギー過程における摂動論的扱いを可能にし、また一方ではハドロン内におけるクォーク・グルオンの閉じ込め(クォーク・グルオンは単体では観測されない)を説明できる非可換ゲージ理論の最も重要な性質である。現在(少なくとも現エネルギー段階で)、強い相互作用の理論としてのQCDに疑いを持つ者は皆無であろう。実際、多くの素粒子また原子核分野で、全ての現象をQCDに基づき理解しようとする努力が続けられており、目覚しい理論的発展・発見が続いている。本稿では高エネルギー散乱過程の観点から、摂動論的QCD(Perturbative QCDの頭文字をとってpQCDと略記される)と呼ばれる理論的アプローチを最近の話題も含めて紹介する。

2. 漸近的自由性

多くの人に馴染深い電磁気学(Maxwell理論)を思い出してほしい。電磁気学は荷電粒子とその相互作用を記述する理論であるが、荷電粒子に働く力は電磁場(量子論的には光子)による。この理論を数学的に記述しようとする、荷電粒子、光子を表す「波動関数」とともに、いくつかのパラメータと呼ばれる定数が顔を出す。荷電粒子(例えば電子)の質量、その電荷(相互作用の強さを表し、場の理論では結合定数と呼ばれる)等である。さて、相対論的量子論を考慮すると、荷電粒子が存在するとその回りでは粒子・反粒子(電子・陽電子)のペアが仮想的に生成、消滅を繰り返している(不確定性原理)。その結果「遮蔽効果」が起こり、荷電粒子の電荷は近くで観測した場合と遠方で観測した場合では異なって見える。電磁気学では荷電粒子の近く程その電荷は大きくなる。このように理論に現れるパラメータはスケールに依存する。

同じ考察をQCD(非可換ゲージ理論)に適用してみよう。QCDはクォークとその相互作用を記述する理論であり、クォークに働く力はグルオンによる。電磁気学と異なる点は、相互作用の強さを表す「電荷」は電磁気

的な電荷では無く「色電荷」と呼ばれるものである。さらに最も重要な違いは、電磁場（光子）は自分自身は相互作用しない（電磁場は電荷を持たない）が、グルオンは自分自身相互作用する（グルオンは色電荷を持つ）という点にある。したがって、色電荷を持つ粒子が存在すると、その回りではクォーク・反クォーク対のみならずグルオンのペアも生成、消滅を繰り返す。このことによりQCDでは電磁気学とは逆の現象「反遮蔽効果」が起こっている。すなわち、色電荷を持つ粒子の近くに行く程その大きさは小さくなり、距離が離れる程大きくなる。この性質を漸近的自由性という¹⁾。散乱過程等を問題にする時、通常、運動量空間で議論する。距離と運動量は共役の関係にあるので、色電荷（結合定数）の大きさを g 、運動量スケールを μ と書いた時、漸近的自由性は

$g(\mu^2) \rightarrow 0$ (∞) when $\mu^2 \rightarrow \infty$ (0), と表される。こうしてQCDでは大きな運動量スケールを伴う現象には摂動論的考察を適用できる可能性が生まれる。以下、この性質に基づいたpQCDの考え方と現状を概観する。

3. pQCD の戦略

相互作用の強さが小さいといえども、ただちに摂動論に突き進む訳にはいかない。既に述べたように、我々が観測できるのはハドロンであり、ハドロンの相互作用をクォーク・グルオンの相互作用から説明するのは決して自明では無い。更に、高エネルギー反応過程と言っても、それは大きな運動量スケールのみならず、小さなスケール（例えば、陽子の質量等）も含むのが普通である。このような状況を知りつつ、pQCDは、かなりナイーブかつ大胆な出発点を想定する。「クォーク・グルオン系に摂動論を適用したら何が起

こるか」という問題設定をする。観測可能なハドロンとの関係は「後で」理論的に矛盾が無いかを議論する。この宿題を始めるに当たって、二つの事実が必要となる。一つは前節で説明した「漸近的自由性」である。もう一つは「繰り込み群方程式」と呼ばれる理論的枠組である。前節で説明したように、結合定数 g は運動量スケール μ （繰り込みスケールと呼ばれる）に依存する。しかし、このスケール μ は出発点であるQCD理論には存在せず“任意”である。この事実から、物理量（一般的に σ と書く）はこの μ の値に依存しない（してはならない）という結論が導かれることになる。これを数式で表したもの

$$\mu \frac{d}{d\mu} \sigma = 0,$$

が「繰り込み群方程式」である。

大きな運動量スケール (Q^2 と書く) を伴うクォーク・グルオンの反応過程を想定しよう。結合定数の変数 μ^2 は任意なので、 $\mu^2 = Q^2$ と選べば、漸近的自由性により結合定数は小さく、結合定数による摂動展開が可能に思われる。残念ながら、現実はその簡単では無い。有限自由度の量子力学と異なり、無限自由度を扱う場の理論では、展開の係数が大きくなる（現実にはほぼ無限大となる）場合が普通である。その場合はもちろん摂動論は破綻する。この問題は歴史的に「質量特異性」問題と呼ばれており、原因は考察している反応過程に Q^2 以外に小さな運動量スケールが存在していることにある。したがって、宿題の次のステップは、有限な係数を持つ収束性の良い摂動展開が得られる「部分」を考えている過程から「取り出す」ことができるか、という問題となる。この手続きは「因子化」と呼ばれる²⁾。模式的には次式を摂動展開の全次数で証明することから始まる。

$$\sigma = [\text{大きな(発散する)係数を持つ部分}] \otimes [\text{有限な係数を持つ摂動展開項}].$$

この因子化は物理過程ごとに証明する必要がある、かなり高度な研究課題である。しかし、過去30年に及ぶ精力的な研究の結果、幸いなことに多くの物理過程で証明されている。なお、蛇足であるが、一つ注意を喚起しておきたい。因子化が成り立つ場合、業界では“因子化定理”により、という言い方が定着している。しかし、この言葉は誤解を含む可能性が大である。数学で“定理”というと、ある普遍的な事実を意味するが、上で説明した因子化は物理過程に依存しており、個々の過程に対し証明が必要である。その意味では決して数学の意味での定理では無い。

さて、上の因子化が証明されても、クォーク・グルオン系とハドロン系の関係の問題が宿題として残されている。二三の例で説明しよう。まず、大きな係数を持つ部分が無い場合である。典型的な例は、電子・陽電子消滅におけるハドロンへの全断面積（R-比と呼ばれる）である。この場合は過程が電子・陽電子の全衝突エネルギー（ $s=Q^2$ ）のみに依存し、大きな補正は現れない。計算結果に小さな運動量スケール（観測されるハドロン）の情報が現れないので、現実の過程に対する理論的予言と解釈できる。因子化が証明されている典型例は、本特集他稿で詳しい説明がある、深非弾性レプトン・核子散乱断面積や、陽子・陽子消滅から多数のハドロンとともに「質量」 Q の仮想光子（ γ ）が生成される「ドレルーヤン（Drell-Yan）」過程と呼ばれる反応である。以下にDrell-Yan過程での因子化の結果を図で説明しよう。図の中心部斜線で示した部分はクォークまたはグルオン(a,

b)から仮想光子（プラス多数の粒子）が生成される過程であり、有限な係数を持つ摂動展開となっている。因子化されたこの部分は、大きな運動量スケール Q のみを含むので、一般に「ハードパート」と呼ばれている。一方、大きな（発散する）係数を持つ項は、陽子内のクォーク・グルオン（パートンと総称される）の分布関数 f_A^a , f_B^b （陽子内のパートンa, bの運動量分布を表す）として理論的に矛盾無く解釈される。この部分は、クォーク・グルオンが陽子内に閉じ込められているという非摂動論的情報を担っているので、pQCDの範疇では扱えない。ただし、この部分はハードパートとは「無関係」であり、物理過程に依らず普遍的なものであることが解かっている。したがって、ある実験（例えば深非弾性レプトン・核子散乱）で一度決めれば、他の過程に対してはpQCDは十分予言能力があることになる。

4. 精密科学としてのpQCD

2007年には重心エネルギー14 TeV (10^{12} eV)のLHC実験がCERNで開始される。また更なる高エネルギー加速器ILCの建設が模索されている。これらの計画の最大の目的は、標準模型を越えた新しい模型の兆候を掴むことである。しかし、今までの標準模型の「成功」は、その手掛かりを標準模型の予言からの僅かなズレに求めざるを得ないことを意味している。このことは逆に、標準模型の理論的予言がいかに正確であるかを要求する。

強い相互作用の高エネルギー過程での振舞を見事に記述するpQCDでも、その予言精度に関しては、QCDに限らず、摂動論の枠組自体に内在する諸問題が立ちだかっている。摂動論の基本的枠組は、教科書にも在る通り50年以上の歴史を持ち、その定式化に

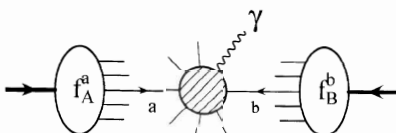


図1 Drell-Yan過程（A, Bは陽子を表す）

は問題は無いが、予言精度の観点、数学的構造の観点からは未解決な問題が山積している。量子論における摂動展開は、高校数学で習う単純な級数展開ではなく「漸近展開」であることは良く知られた事実である。したがって、その予言には「原理的に」ある程度の不定性を含むこととなる。(この不定性はかなり小さいと期待されているが。)この問題に目をつぶっても、QCDではかなり大きな理論的不定性が危惧される。その要因は幾つか考えられるが、一番大きなものはスケールの選択にある。前節の繰り込み群方程式の説明で、物理量は繰り込みスケール μ には依存してはならないと述べたが、これは摂動展開の全次数を考慮した時の主張である。しかし、現実の計算では、摂動のある次数で止めざるを得ない。この「切断」が数値的には大きな問題を起こす。すなわち、繰り込みスケール μ の選択に物理的予言が依存するという現象を起こす。その依存性は計算されなかった、より高次の項に押しつけられることになる。10年程前までは、技術的、理論的問題からせいぜい摂動の2次までの計算しか存在しなかった。その結果を用いて μ を典型的なハードスケール Q から例えば $Q/2 \sim 2Q$ と変えると、理論の予言は $\approx 30\%$ 程も変わるという結果であった。

この問題に対する最もナイーブな解答は、 μ 依存性は、より高次項に先送りされるので、できるだけ高次項まで計算せよ、というものである。過去10年、この愚直な方針に基づいて多くの過程で、より高次項の計算が精力的に行なわれた。その結果、多くの過程で μ の選択による不定性が10%以内に収められる結果が得られている。将来の高エネルギー実験(LHC, ILC等)の測定精度を考えると、満足できる状況であろう。

QCDに限らず、質量ゼロの粒子を含むゲージ理論では、もう一つ厄介な問題があ

る。それは、運動量の比較的小さなゲージ粒子(グルオン)が多量に発生される確率が非常に高い、という問題である。これは「軟グルオン問題」と呼ばれている。前節まで、有限な係数を持つ摂動論的に意味のあるハードパートが因子化の証明により取り出せると述べたが、軟グルオン効果を考えると、どのような物理量を考察するかに依存するが、その係数は必ずしも小さくは無い状況が存在する。この場合は、そのような大きな項は摂動の全次数に渡って足し上げる必要がある。これは「軟グルオンの再足し上げ」と呼ばれている。過去20年程この問題は精力的に調べられ、いくつかの過程ではその再足し上げが可能であることが知られている。紙面の都合上詳しい説明は割愛するが、この理論的發展により、pQCDの予言精度がさらに高まっているという事実だけを記しておく。

5. pQCDの今そして今後

最近、ツイスター(Twistor)空間における弦理論とQCD(ゲージ理論)の散乱振幅との関係が大きな話題となっている³⁾。仕掛け人は、著明な研究者である米国プリンストン高等研究所のウィッテン(E. Witten)とその共同研究者である。この話題は、純理論的な興味と将来の高エネルギー実験を視野に入れた現実的有用性(振幅の新しい計算方法)の二つの問題を提供している。本稿ではコライダー物理という現象論的立場から、理論的説明は割愛し、有用性という観点からこの話題に簡単に触れる。

一つ典型的な例を挙げよう。世界最高のエネルギーを誇るLHC実験に関し、90%以上の素粒子論研究者は、標準模型で唯一発見されていない粒子、ヒッグス粒子の発見と、新しい模型の有望株である超対称性粒子の発見を口にする。しかし、こと超対称性粒子の発

見は実験的には至難の技と考えられる。超対称性粒子は、非常に多数の普通（標準模型）の粒子にカスケード崩壊すると想像され、しかも、超対称性荷電の保存から、最後には観測器にかからない粒子（ニュートラリーノ）を放出する。ところが、標準模型の範囲でも類似なイベントは十分起こり得る。すなわち、標準模型からのバックグラウンドを如何に正確に抑えておくかが非常に重要となる。

一方、pQCDの枠組に基づきハードパートの計算は進んだが、上のような終状態に多数の粒子を含む計算は、実は摂動の最低次でも殆んどなされていない。始状態の粒子数（普通は2個）と終状態の粒子数（ $n-2$ ）を併せて、業界では散乱振幅を n -点関数と呼んでいる。普通、場の量子論で散乱振幅を計算する時は、ファインマンルールと呼ばれる方法に従う。これは、ある反応に関与する全ての項を図（Feynman Diagram）で表し、それに対し、ある規則によって数式をあてがうという方法である。この方法では n が小さい時は何とかなるが、 n が大きくなると技術的に破綻を生じる。

QCDで特徴的なグルオンの散乱を考えてみよう。グルオンはスピン1を持つ粒子であり、散乱振幅はスピンの依存する。相対論的量子論では、スピンの量子化軸を粒子の運動量方向に取るのが普通であり、運動量方向に並行な時を+とし、反平行な時を-として、ヘリシティーと呼ぶ。1980年代後半、パーク（S. Parke）とテイラー（T. Taylor）等は、摂動の最低次（ツリーと呼ぶ）では、散乱粒子のヘリシティーが全て同じ、又は一つだけ異なる振幅はゼロであることを示し、二つの粒子だけ他と異なるヘリシティー「最大にヘリシティーを破る（MHV）」の n -点振幅に対し簡単な表式を与えた。しかし、任意のヘリシティーを持つ振幅の計算はツリーレベルでも容易では無い。表1にグルオン・グ

表1 ファインマン図の個数

| $n =$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|----|-----|---------|------------|
| 図の個数 | 4 | 25 | 220 | 2,485 | 34,300 |
| | | | | 9 | 10 |
| | | | | 559,405 | 10,525,900 |

ルオンから $(n-2)$ 個のグルオンが生成される場合のファインマン図の個数を示す。

この表からも明らかのように、多点関数の計算は、計算機による自動化の可能性を考慮したとしても、実質的には殆んど不可能である。理論の精密予言という観点からは、これらの多点関数に対する高次補正も必要となるが、その時にはファインマン図は指数的に増大する。すなわち、伝統的な計算方法は破綻することになる。ツイスターストリング理論に基づいた新しい計算方法は、これらの問題を一気に解決する可能性を持っている。現在、この理論形式のさらなる詳細の研究、さらには摂動の二次レベルでの考察が精力的に行なわれている。本稿では、以上のトピックスに関し、実用的な観点から説明したが、理論的にも非常に興味深い、また解明すべき未知な点も多々あることは言うまでも無い。今後しばらくは、この分野の発展に注視すべきであろう。

6. おわりに

強い相互作用という一見複雑な相互作用が非可換ゲージ理論としてのQCDで記述され、しかも高エネルギー過程では「摂動論」を適用できるという発見は、この30年の素粒子物理学の分野での輝かしき成果である。pQCDの研究目的はQCDのダイナミクスを明らかにすることであり、来る新しい加速器実験に備えることである。pQCDの分野には、理論的・技術的にチャレンジングな問題が山積している。

■ 参 考 文 献 ■

- 1) ノーベル財団ホームページ：
<http://nobelprize.org/physics/>
- 2) J.C. Collins, D. Soper and G. Sterman, Factorization of hard processes in QCD, in Perturbative Quantum Chromodynamics (World Scientific, Singapore, 1989) ed. A.H. Mueller, p. 1.
- 3) S.K. Blau (磯暁 訳), パリティ 20 (2005) 70.
L. Dixon, hep-ph/0512111 (2005)

小平 治郎 (こだいら・じろう)
高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核
研究所 教授, 総合研究大学院大学 教授