# カイラル・クォーク・ソリトン模型と核子のスピン構造

２００５年２月、 東京工大

## Plan of Lecture

### 1. Introduction

### 2. カイラル対称性とQCDの有効模型

2.1. QCDラグランジアンとカイラル対称性

2.2. Gell-Mann-Levyのシグマ模型

2.3. Nambu-Jona-Lasinio模型

### 3. カイラル・クォーク・ソリトン模型

3.1. Fundamentals of the Chiral Quark Soliton Model

### 4. パートン分布関数と核子のスピン構造

4.1. DIS and Parton Distribution Functions

4.2. CQSM and Parton Distribution Functions

4.3. Flavor SU(3) CQSM and Nucleon Strange Sea

4.4. Generalized Parton Distribution Functions

4.5. $\pi N$ Sigma Term and Chiral-Odd Twist-3 PDF

## 1. Introduction

量子色力学(QCD)

カラー閉じ込め

no free quarks, gluons

カイラル対称性

漸近自由性

$$\lim_{Q^2 \to \infty} \alpha_S(Q^2) = 0$$

非摂動論的QCD

how to solve

有効模型

格子ゲージ理論

computer simulation

Witten

$$\mathcal{L}_{QCD} \overset{N_c \to \infty}{\sim} \text{effective meson theory}$$

(トポロジカル・ソリトンとしてのバリオン)

rivival of Skyrme model

Chiral Quark Soliton Model

摂動論的QCD

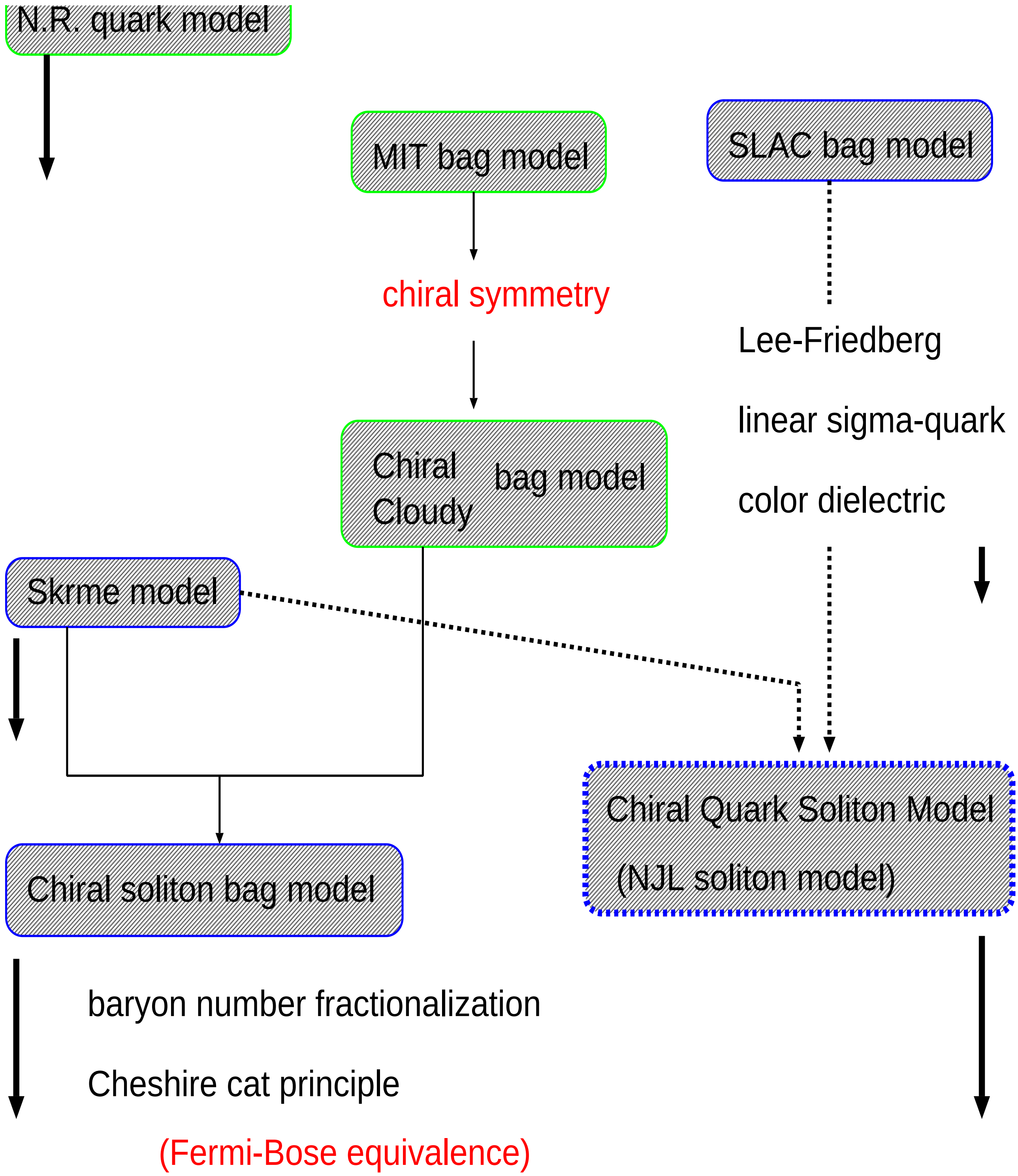
- 繰り込み群
- 因子化定理
- 演算子積展開

深部非弾性散乱

quark-gluon jets

などの物理への応用

バリオンの有効模型の系譜



## 2. カイラル対称性とQCDの有効模型

### 2.1. QCDラグランジアンとカイラル対称性

basic QCD lagrangian

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{chiral} + \mathcal{L}_{mass}$$

chiral symmetric part

$$\mathcal{L}_{chiral} = \bar{\psi}\, i\, \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu - i\, g\, A_\mu \qquad (A_\mu \equiv A^a_\mu T_a = A^a_\mu\, \lambda_a/2) \\ F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\, g\, [A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

chiral symmetry breaking part

$$\mathcal{L}_{mass} = -\sum_{a=1}^{3}\sum_{f=1}^{6} m_f\, \bar{q}^{fa}\, q^{fa}$$

**クォーク閉じ込め**のため$m_f$は直接観測できないが、**カレント代数**の枠組みに基づく**中間子の質量スペクトル**の解析から、カレント・クォーク質量と呼ばれる次の値が得られている。

$$\begin{aligned} m_u &\simeq 4.2\,\mathrm{MeV}, \; m_d \simeq 7.5\,\mathrm{MeV}, \; m_s \simeq 150\,\mathrm{MeV}, \\ m_c &\simeq 1.2\,\mathrm{GeV}, \; m_b \simeq 4.2\,\mathrm{GeV}, \; m_t \simeq 170\,\mathrm{GeV} \end{aligned}$$

- $SU(3)$ flavor 対称性はQCDの比較的よい対称性

$$(\because)\quad m_u \simeq m_d \simeq m_s \quad \ll \quad \Lambda_{QCD}$$

- $SU(2)$ isospin 対称性はより厳密な対称性である。

特に、$m_u = m_d$ なら isospin 対称性は厳密な対称性で、この時

$$m_n = m_p, \quad m_{K^+} = m_{K^0}, \quad \text{etc.}$$

[注意] $m_{\pi^\pm} = m_{\pi^0}$ は $m_u = m_d$ を要求しない！

$$(m_{\pi^\pm} \simeq 139.6\,\mathrm{MeV}, \quad m_{\pi^0} \simeq 135.0\,\mathrm{MeV})$$

$\pi^\pm$ と $\pi^0$ の質量差の原因は **電磁相互作用**！

**不思議なパズル**

$\pi$ 中間子の質量が他のハドロンに比べて段違いに軽い

$$m_\pi \,/\, m_N \simeq 0.14 \quad \ll \quad 1$$

という実験事実

$$\Downarrow \quad \textbf{Nambu のアイデア}$$

$\pi$ 中間子はカイラル対称性という連続変換に対する対称性が **自発的に破れた**ときに現れる **Goldston 粒子**である。

## カイラル対称性とは？

$$\mathcal{L}_{free\,Dirac} \;=\; \bar{\psi}\,(\,i\,\not{\partial} - m)\,\psi$$

$$\psi \;=\; \frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi \;+\; \frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi \;\equiv\; \psi_R \;+\; \psi_L$$

また

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \;&=\; \psi_R^\dagger \;+\; \psi_L^\dagger \\ \bar{\psi} \;&=\; \psi_R^\dagger\gamma^0 \;+\; \psi_L^\dagger\gamma^0 \;\equiv\; \bar{\psi}_R \;+\; \bar{\psi}_L \end{aligned}$$

## カイラル変換

$$\left.\begin{aligned} \psi_R \;&\longrightarrow\; e^{i\theta_R}\,\psi_R \\ \psi_L \;&\longrightarrow\; e^{i\theta_L}\,\psi_L \end{aligned}\right\} \quad :$$

**右巻き、左巻き成分の**
**別々の (大局的) 位相変換**

このとき

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R \;&\longrightarrow\; \bar{\psi}_R\,e^{-i\theta_R} \\ \bar{\psi}_L \;&\longrightarrow\; \bar{\psi}_L\,e^{-i\theta_L} \end{aligned}$$

## 運動エネルギー項

$$\bar{\psi}\;i\,\not{\partial}\,\psi \;=\; (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)\;i\,\not{\partial}\,(\psi_R + \psi_L)$$

ところで

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R \;&=\; \psi_R^\dagger\gamma^0 \;=\; \psi_R^\dagger\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,\gamma^0 \;=\; \psi_R^\dagger\,\gamma^0\,\frac{1-\gamma_5}{2} \;=\; \bar{\psi}_R\,P_L \\ \bar{\psi}_L \;&=\; \psi_L^\dagger\gamma^0 \;=\; \bar{\psi}_L\,P_R \end{aligned}$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi &= (\bar{\psi}_R P_L + \bar{\psi}_L P_R)\, i\gamma^\mu \partial_\mu (P_R \psi_R + P_L \psi_L) \\
&= \bar{\psi}_R\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi_R + \bar{\psi}_L\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi_L \\
&\to \bar{\psi}_R\, e^{-i\theta_R}\, i\, \partial\!\!\!/\, e^{i\theta_R} \psi_R + \bar{\psi}_L\, e^{-i\theta_L}\, i\, \partial\!\!\!/\, e^{i\theta_L} \psi_L \\
&= \bar{\psi}_R\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi_R + \bar{\psi}_L\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi_L = \bar{\psi}\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi
\end{aligned}
$$

kinetic term はカイラル変換に対して不変！

**質量項**

$$
\begin{aligned}
m\,\bar{\psi}\psi &= m\,(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(\psi_R + \psi_L) \\
&= m\,(\bar{\psi}_R P_L + \bar{\psi}_L P_R)(P_R \psi_R + P_L \psi_L) \\
&= m\,(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) \\
&\to m\,(\bar{\psi}_R\, e^{-i\theta_R} e^{i\theta_L} \psi_L + \bar{\psi}_L\, e^{-i\theta_L} e^{i\theta_R} \psi_R) \neq m\,\bar{\psi}\psi
\end{aligned}
$$

mass term はカイラル変換に対する不変性を破る！

逆に言うと　$\Downarrow$

massless Dirac 理論は**カイラル対称性**を持つ

[補遺] **chirality と helicity**

$$\text{helicity} \quad h \;\equiv\; \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \quad : \quad \text{粒子のスピンの運動量方向の成分}$$

ただし

$$\boldsymbol{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \qquad : \qquad \text{相対論的スピン演算子}$$

Dirac 方程式

$$(\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m \,)\,\psi = 0$$

chirality 分解

$$\psi \;=\; \left(\frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi \;=\; (P_R + P_L)\,\psi \;=\; \psi_R \;+\; \psi_L$$

note that

$$\gamma_5\,\psi_R \;=\; +\,\psi_R \qquad : \quad \text{カイラリティ正}$$
$$\gamma_5\,\psi_L \;=\; -\,\psi_L \qquad : \quad \text{カイラリティ負}$$

using $\{\gamma^{\mu}, \gamma_5\} = 0$

$$i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi_R \;=\; m\,\psi_L$$
$$i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi_L \;=\; m\,\psi_R$$

もし $m = 0$ なら

$$i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi_{L/R} \;=\; 0, \qquad \text{for} \quad \psi_{L/R} \;=\; \psi_R \;\text{ or }\; \psi_L$$

**右巻き、左巻き成分が decouple**

質量0のDirac粒子の運動方程式

$$
\begin{aligned}
i\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= 0 \\
(\,i\,\gamma^0\,\partial_t + i\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,)\,\psi &= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{正エネルギー解}}$

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= e^{-ip\cdot x}\,u(p) \qquad\qquad (p^0 = |\boldsymbol{p}|) \\
&= e^{-i(p^0\,t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\,u(p) \;=\; e^{-\,i\,(\,|\boldsymbol{p}|\,t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\,)}\,u(p)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
(\gamma^0\,|\boldsymbol{p}| - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})\,u(p) = 0
$$

左から $\gamma^5\gamma^0$ を掛けて

$$
\gamma^5\,|\boldsymbol{p}|\,u(p) \;=\; \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}\,u(p)
$$

ここで $\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Sigma}$ なので

$$
\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\,u(p) \;=\; \gamma^5\,u(p)
$$

$$
\Downarrow \quad \text{粒子}
$$

$$
\therefore \quad \textbf{helicity} \;=\; \textbf{chirality}
$$

$\boxed{\text{負エネルギー解}}$

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= e^{ip\cdot x}\, v(p) & & (p^0 = -|\boldsymbol{p}|) \\
&= e^{i\,(p^0\,t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\,)}\, v(p) &=& \; e^{-\,i\,(|\boldsymbol{p}|\,t + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\,)}\, v(p)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$(\gamma^0|\boldsymbol{p}| + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})\, v(p) \;=\; 0$$

前と同様にして

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\, v(p) \;=\; -\,\gamma^5\, v(p)$$

$$\Downarrow \quad \text{反粒子}$$

$$\therefore \quad \textbf{helicity} \;=\; -\,\textbf{chirality}$$

[注意]

$m \neq 0$ の Dirac 粒子に対しては helicity は Lorentz 不変な概念ではない。なぜなら粒子の速度よりも速く走る座標系に移ると helicity の符号は逆になってしまうから。

$$\Downarrow$$

Dirac 粒子は質量 0 である限り、Lorentz 変換によって異なる helicity の状態に移り変わることはなく、2つの異なる helicity 状態は全く独立の存在となる。

[**Noether の定理**]

ラグランジアン (ハミルトニアン) が**連続変換に対して不変**ならば対応する**保存流** (Noether current) が存在する

(証) 今、$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ が次の変換に対して不変であるとする

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i + \delta\phi_i \quad \text{with} \quad \delta\phi_i = i\,\delta\,\omega_a\,(T_a)_{ij}\,\phi_i$$

$$T_a \quad : \quad \text{内部対称性の生成子 (generator)}$$

この時

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\,\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\delta(\partial_\mu\phi_i) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\,\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\partial_\mu(\delta\phi_i) \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\delta\phi_i\right] \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,i\,(T_a)_{ij}\,\phi_i\right]\,\delta\omega_a \end{aligned}$$

ゆえに

$$\partial_\mu J_a^\mu \;=\; 0 \quad \text{with} \quad J_a^\mu \;\equiv\; -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,i\,(T_a)_{ij}\,\phi_j$$

$$Q_a \;\equiv\; \int J_a^0(x)\,d^3x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}Q_a = 0 \quad (\textbf{電荷保存})$$

**2-flavor QCD with idealized limit $m_u = m_d = 0$**

$$\mathcal{L}_{chiral} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}\, i \not{D}\, \psi, \qquad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

invariant under $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R \times [U(1)]_L \times [U(1)]_R$

$$\begin{aligned} [SU(2)]_L &: \psi_L \to e^{i\boldsymbol{\theta}_L \cdot \boldsymbol{\tau}/2}\, \psi_L \\ [SU(2)]_R &: \psi_R \to e^{i\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}/2}\, \psi_R \\ [U(1)]_V &: \psi_L \to e^{i\phi_L}\, \psi_L \\ [U(1)]_A &: \psi_R \to e^{i\phi_R}\, \psi_R \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\theta}_L, \boldsymbol{\theta}_R, \phi_L, \phi_R$ : 任意の実数パラメター

or $\Downarrow$ equivalently

invariant under $[SU(2)]_V \times [SU(2)]_A \times [U(1)]_V \times [U(1)]_A$

$$\begin{aligned} [SU(2)]_V &: \psi \to e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}/2}\, \psi \\ [SU(2)]_A &: \psi \to e^{i\gamma_5 \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau}/2}\, \psi \\ [U(1)]_V &: \psi \to e^{i\theta}\, \psi \\ [U(1)]_A &: \psi \to e^{i\gamma_5 \phi}\, \psi \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \theta, \phi$ : 任意の実数パラメター

[等価性の確認]

カイラル変換 $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$ において

(A) $\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R = \boldsymbol{\alpha}$ ととると

$$\begin{aligned} \psi = \psi_L + \psi_R \quad &\longrightarrow \quad e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi_L \;+\; e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi_R \\ &= \quad e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,(\,\psi_L \;+\; \psi_R) \;=\; e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi \end{aligned}$$

**vector (isospin) rotation** に対応

(B) $\boldsymbol{\theta}_L = -\boldsymbol{\theta}_R = -\boldsymbol{\beta}$ ととると

$$\begin{aligned} \psi = \psi_L + \psi_R \quad &\longrightarrow \quad e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi_L \;+\; e^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi_R \\ &= \quad \left(\cos\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2} - i\,\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\sin\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}\right)\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi \\ &+ \quad \left(\cos\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2} + i\,\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\sin\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}\right)\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi \\ &= \quad \left(\cos\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2} + i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\sin\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}\right)\,\psi \\ &= \quad e^{i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\beta}/2}\,\psi \end{aligned}$$

**axial (chiral) rotation** に対応

カイラル変換 $[SU(2)]_V \times [SU(2)]_A \times [U(1)]_V \times [U(1)]_A$ に対する**不変性**に対応する**保存流** (**Noether current**) は

$$
\begin{aligned}
J^a_\mu &= \bar\psi\,\gamma_\mu\,\tau^a\,\psi \qquad (a=1,2,3) &&: \ \text{isospin current}\\
J^a_{5\mu} &= \bar\psi\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\tau^a\,\psi \quad (a=1,2,3) &&: \ \text{isovector axial current}\\
j_\mu &= \bar\psi\,\gamma_\mu\,\psi &&: \ \text{baryon (quark) current}\\
j_{5\mu} &= \bar\psi\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\psi &&: \ [U(1)]_A \ \text{current}
\end{aligned}
$$

※ ただし $[U(1)]_A$ 対称性に対するカレントの保存はQCDの $[U(1)]_A$ anomalyと呼ばれる量子効果のために破れる。

— **量子異常　（軸性異常）** —

これらの対称性は自然にどのように反映されているだろうか?

$\Downarrow$

$[SU(2)]_V$ : isospin保存 $\Longrightarrow$ hadronのisospin多重項の質量縮退

$[U(1)]_V$ : baryon数(quark数)保存

これらの対称性はそのまま（素直に）反映

— **Wigner realization of symmetry** —

しかし**カイラル回転**に対する対称性の発現の仕方は少し異なる。実際もし$[SU(2)]_A$対称性が素直に（直接）発現したとすると、逆のパリティを持つハドロンが同じ質量を持ついわゆる**パリティ二重項**が観測されなければならないが、例えば核子と同程度の質量を持つ逆パリティのバリオンは観測されていない。

$$\Downarrow$$

$[SU(2)]_A$対称性は**自発的**に破れている。

対称性が自発的に破れるとは、ハミルトニアンの持つ対称性を、系の基底状態がそのまま反映しない状況をいう。

カイラル対称性という連続変換に対する対称性（不変性）の自発的破れに伴う**質量0のNambu-Goldston粒子**として現れるのが$\pi$中間子である。

— **Nambu-Goldstone realization of symmetry** —

対称性の自発的破れとN-Gボソンの出現の機構について理解するために、まず**強磁性体**を考え、次にハドロンの簡単な**模型**を考える。

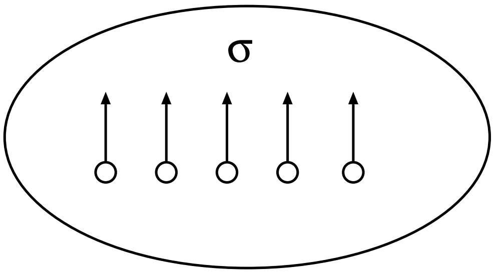
## 強磁性体（磁石）と対称性の自発的破れ

強磁性体の**自発磁化**の原因としてのスピン・スピン相互作用

$$V \;=\; -\,J \sum_{(i,j)} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \qquad (\,J>0\,)$$

$(i,j)$ ： 隣り合った原子の組についての和

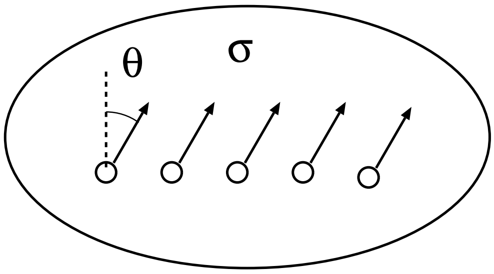
$V$ は隣り合う原子のスピンを同じ向きに揃えようとするので、系の基底状態は全てのスピンが一方向に揃った状態




$$\langle J_x \rangle \;=\; \langle J_y \rangle \;=\; 0, \qquad \langle J_z \rangle \;=\; \frac{\hbar}{2}\,\langle \sum_i \sigma_{iz} \rangle \;\neq\; 0$$

$\langle J_z \rangle$ ： **秩序パラメター** (**order parameter**)

しかし、元々の相互作用ハミルトニアンは（スカラーだから）**回転対称性**を有するので、全スピンの向きが $z$ 方向から任意の角度 $\theta$ だけ傾いた次のような状態も全く同じエネルギーを有することは明らかである。




無限系の特徴として、エネルギー的に完全に縮退したこれらの基底状態の間には無限に高いポテンシャル障壁が存在する。言い換えると有限のエネルギーでそれらの状態を別の状態に変えることはできない。数学的に言うと、対応する Hilbert 空間の状態ベクトルは直交している。

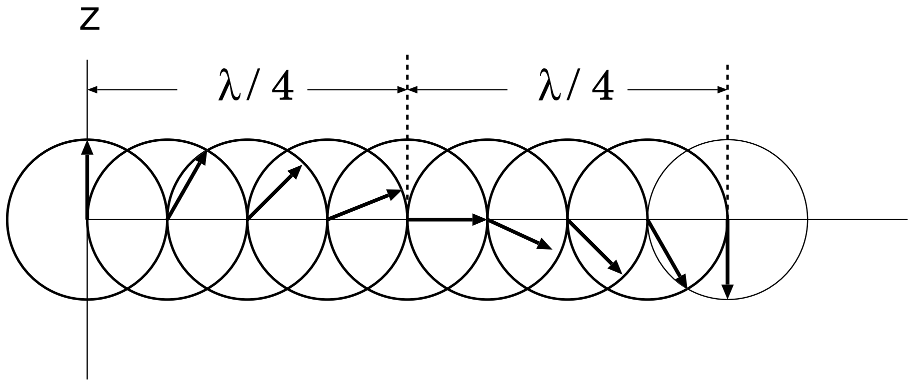
互いに直交するこれらの状態は**真空の候補**として同等であるが、それを一つだけ選ぶことにより、元々のハミルトニアンが持っていた対称性（今の場合、回転対称性）は**自発的に破れる**。

回転対称性を自発的に破る強磁性体の基底状態には Nambu-Goldsotone の定理により**質量が 0 の励起**が現れる。

$$\Downarrow$$

今の場合それは、隣り合う原子のスピンが少しずつ向きを変えて伝播する**スピン波**に対応する。

**マグノン**




今、原点で $z$ 方向を向いた原子のスピンが少しずつ向きを変えつつ右方向に伝播していく波を考える。

波長が長い極限では、隣接原子のスピンはほとんど平行で、系のエネルギーは基底状態とほとんど変わらない。

$$\Downarrow$$

それゆえ、このスピン波は、波長 $\lambda \to \infty \ \ (p = \hbar/\lambda \to 0)$ の極限で

$$E \ \propto \ p^2$$

を満たす **Goldstone mode** になる。

## 2.2. Gell-Mann-Levy のシグマ模型

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2\right] + \bar{N}\, i\, \gamma^\mu \partial_\mu N \\ &+ g\, \bar{N}\,(\sigma + i\, \gamma^5\, \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\, N - V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)\end{aligned}$$

$$V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) = -\frac{\mu^2}{2}\,(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}\,(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \qquad (\mu^2 > 0)$$

この模型は次の $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$ 変換に対して不変

無限小 $[SU(2)]_V$ 変換

$$\begin{cases} \sigma \;\to\; \sigma' \;=\; \sigma \\ \boldsymbol{\pi} \;\to\; \boldsymbol{\pi}' \;=\; \boldsymbol{\pi} \;-\; \delta\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi} \\ N \;\to\; N' \;=\; N \;+\; i\; \delta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N \end{cases}$$

無限小 $[SU(2)]_A$ 変換

$$\begin{cases} \sigma \;\to\; \sigma' \;=\; \sigma \;+\; \delta\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \;\to\; \boldsymbol{\pi}' \;=\; \boldsymbol{\pi} \;-\; \delta\boldsymbol{\beta}\; \sigma \\ N \;\to\; N' \;=\; N \;+\; i\; \delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\, N \end{cases}$$

[問] Gell-Mann-Levy のラグランジアンが $[SU(2)]_V \times [SU(2)]_A$ 変換に対して不変であることを確認せよ。

- $\sigma, \boldsymbol{\pi}$ の変換性の導出法

(1) $SU(2) \times SU(2)$ と $O(4)$ の準同型性に注目する

(2) $\sigma \sim \bar{N}\, N, \ \boldsymbol{\pi} \sim \bar{N}\, i\gamma_5 \boldsymbol{\tau}\, N$ に注目する

ここでは直接的な(2)を用いてみる。

$SU(2)_V$ のもとで

$$
\begin{aligned}
N &\rightarrow N' = e^{i\delta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} N \simeq N + i\,\delta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N \\
\bar{N} &\rightarrow \bar{N}' = \bar{N}\, e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} \simeq \bar{N} - \bar{N}\, i\,\delta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \\
\bar{N}\, N &\rightarrow (\,\bar{N} - \bar{N}\, i\,\delta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\,(N + i\,\delta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N\,) \simeq \bar{N}\, N \\
\bar{N}\, i\,\gamma^5\,\tau^a\, N &\rightarrow (\bar{N} - \bar{N}\, i\,\delta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,)\, i\,\gamma_5\,\tau^a\,(\,N + i\,\delta\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N\,) \\
&\simeq \bar{N}\, i\,\gamma_5\,\tau^a\, N + \frac{1}{2}\,\delta\alpha^b\ \bar{N}\,\gamma_5\,(\tau^b\tau^a - \tau^a\tau^b)\, N \\
&= \bar{N}\, i\,\gamma_5\,\tau^a\, N - \varepsilon^{abc}\,\delta\,\alpha^b\ \bar{N}\, i\,\gamma_5\,\tau^c N
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\sigma \rightarrow \sigma, \quad \pi^a \rightarrow \pi^a - (\delta\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi})^a
$$

$[SU(2)]_A$ のもとで

$$
\begin{aligned}
N &\rightarrow N + i\,\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\, N \\
\bar{N} &\rightarrow \bar{N} + \bar{N}\, i\,\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\,\gamma_5 \\
\bar{N}N &\rightarrow (\bar{N} + \bar{N}\, i\gamma_5\,\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})(N + i\gamma_5\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N) \\
&\simeq \bar{N}N + \delta\boldsymbol{\beta}\cdot\bar{N}\, i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\, N \\
\bar{N}i\gamma_5\tau^a N &\rightarrow (\bar{N} + \bar{N}\, i\gamma_5\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\, i\,\gamma^5\tau^a\,(N + i\,\gamma_5\,\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N) \\
&\simeq \bar{N}\, i\gamma^5\tau^a N - \delta\beta^a\,\bar{N}N
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\sigma \to \sigma \;+\; \delta\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi} \;-\; \delta\boldsymbol{\beta}\,\sigma$$

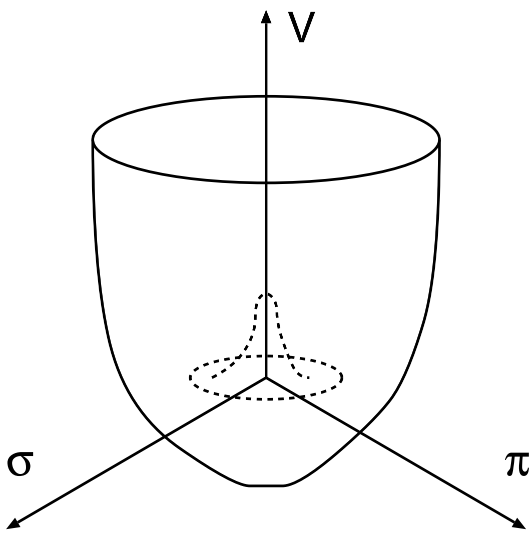
$[SU(2)]_V \times [SU(2)]_A$ 不変性に対する Noether current は

$$\begin{aligned} J_\mu^a \;&=\; \bar{N}\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}N \;+\; \varepsilon^{abc}\,\pi^b\,\partial_\mu\pi^c & &: \; [SU(2)]_V \\ J_{5\mu}^a \;&=\; \bar{N}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}N \;+\; (\partial_\mu\pi^a)\,\sigma \;-\; (\partial_\mu\sigma)\,\pi^a & &: \; [SU(2)]_A \end{aligned}$$

[問] これを確かめよ。またこれらのカレントは保存すること
　を運動方程式を用いて確かめよ。

G-L ラグランジアンの最低エネルギー状態（**真空**）

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta\sigma} \;&=\; \sigma\,[-\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] \;=\; 0 \\ \frac{\delta V}{\delta\boldsymbol{\pi}} \;&=\; \boldsymbol{\pi}\,[-\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] \;=\; 0 \end{aligned}$$




$\mu^2 \;>\; 0$ だから V の minimum
では

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 \;=\; \frac{\mu^2}{\lambda} \;\equiv\; v^2$$

真空は**無限に縮退**している。

wine bottle の底のどの点も**真空の候補**として同等であるが、通常

$$< 0\,|\sigma|\,0 > = \ v, \quad < 0\,|\pi|\,0 > = \ 0$$

なる点を真空に選ぶ。この選択によって、しかし $SU(2)\times SU(2) \sim O(4)$ 対称性は**自発的に破れる**。（Cf. **強磁性体**）

## 真空のまわりの励起モード

$$\sigma \ = \ \langle 0\,|\sigma|\,0\rangle \ + \ \sigma' \ = \ \sigma_0 \ + \ \sigma'$$

このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ &= \ \frac{1}{2}\,[(\partial_\mu \sigma')^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] \\ &- \ \mu^2 \sigma'^2 \ - \ \lambda\,\sigma_0\,\sigma'\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \ - \ \frac{\lambda}{4}\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \\ &+ \ g\,\bar{N}\,(\sigma' + i\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\,\gamma_5)\,N \ + \ g\,\sigma_0\,\bar{N}N \end{aligned}$$

$\sigma'$ の質量 : $m_\sigma \ = \ \sqrt{2\mu^2}$

$\boldsymbol{\pi}$ の : $m_\pi \ = \ 0$ 　(**Nambu-Goldstone ボソン**)

$N$ の質量 : $m_N \ = \ g\sigma_0$ 　(力学的に生成されたフェルミオン質量)

こうして $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$ 対称性は自発的に破れ、質量 0（スピン 0）の粒子が現れる。（Goldstone の定理の実例）それに伴って元々質量 0 であったフェルミ粒子（核子）が力学的に生成された質量を持つ。

— **N-G realization of chiral symmetry** —