2.3. Nambu-Jona-Lasinio 模型

$$\mathcal{L}_{NJL} \;=\; \bar{\psi}\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi \;+\; \frac{1}{2}\, G \left[\, (\bar{\psi}\,\psi)^2 + (\bar{\psi}\, i\,\gamma_5\, \boldsymbol{\tau}\psi)^2 \,\right]$$

次の $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$ **大局的位相変換**の下で不変

$$\begin{aligned} [SU(2)]_L &\;:\; \psi_L \;\longrightarrow\; e^{i\,\Theta_L\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi \\ [SU(2)]_R &\;:\; \psi_R \;\longrightarrow\; e^{i\,\Theta_R\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\,\psi \end{aligned}$$

真空汎関数から出発

$$Z \;\equiv\; \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{i \int d^4x\, \mathcal{L}_{NJL}}$$

[補助場の方法]

恒等式

$$1 \;\sim\; \int \mathcal{D}\sigma'\, \mathcal{D}\boldsymbol{\pi}' \;\exp\; i \int d^4x \left[-\frac{g^2}{2G}\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}'^2) \right]$$

を挿入

$$\begin{aligned} Z \;\;\sim\;\; & \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\sigma'\, \mathcal{D}\boldsymbol{\pi}' \;\exp\; i \int d^4x \\ \times & \left\{ \bar{\psi}\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi + \frac{G}{2} \left[\, (\bar{\psi}\,\psi)^2 + (\bar{\psi}\, i\,\gamma_5\, \boldsymbol{\tau}\,\psi)^2 \right] \right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{g^2}{2G}\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}'^2) \right\} \end{aligned}$$

変数変換

$$\sigma' \;=\; \sigma \;+\; \frac{G}{g}\,\bar{\psi}\,\psi, \quad \boldsymbol{\pi}' \;=\; \boldsymbol{\pi} \;+\; \frac{G}{g}\,\bar{\psi}\,i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\,\psi$$

によって積分測度は不変、すなわち $\mathcal{D}\sigma'\mathcal{D}\boldsymbol{\pi}' = \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\boldsymbol{\pi}$

$$\Downarrow$$

$$Z \;\sim\; \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\sigma\,\mathcal{D}\pi \;\; \exp\, i \int \mathcal{L}'_{NJL}\; d^4x$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{NJL} \;&=\; \mathcal{L}_{NJL} \;-\; \frac{g^2}{2\,G}\left[\left(\sigma + \frac{G}{g}\,\bar{\psi}\,\psi\right)^2 + \left(\boldsymbol{\pi} + \frac{G}{g}\,\bar{\psi}\,i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\,\psi\right)^2\right] \\
&=\; \bar{\psi}\,\left[\,i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\right]\psi - \frac{g^2}{2\,G}\,(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma \\ \boldsymbol{\pi}\end{array}\right\} \quad : \quad \textbf{collective meson fields (補助場)}$$

つまり、補助場の方法と呼ばれるこの trick で

$$\boxed{\textbf{4-Fermi 相互作用}}$$

$$\Downarrow$$

補助場 $\sigma(x), \boldsymbol{\pi}(x)$ と Yukawa 型相互作用 $\bar{\psi}\,\psi\,\sigma,\; \bar{\psi}\,i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\psi\cdot\boldsymbol{\pi}$

Fermionの経路積分に対するGauss積分公式

$$\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{\bar{\psi} A \psi} \;=\; \det A$$

を用いて

$$\begin{aligned} Z \;&=\; \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\sigma\, \mathcal{D}\boldsymbol{\pi}\; \exp \int d^4x \\ &\quad\times \left\{ \bar{\psi}\, [\, i\, \partial\!\!\!/ - g\, (\sigma + i\, \gamma_5\, \boldsymbol{\tau}\, \cdot \boldsymbol{\pi})\,]\; \psi - \frac{g^2}{2G}\, (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \right\} \\ &\sim\; \int \mathcal{D}\sigma\, \mathcal{D}\boldsymbol{\pi}\; e^{\, i\, S_{eff}\, [\sigma, \boldsymbol{\pi}]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{eff}[\sigma, \boldsymbol{\pi}] \;&=\; -\, i\; \log \det\, [\, i\; \partial\!\!\!/ - g\, (\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau})] \\ &\qquad - \frac{g^2}{2G} \int d^4x\, (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \end{aligned}$$

更に、恒等式

$$\log \det A \;=\; \mathrm{Sp} \log A$$

を用いると

$$\begin{aligned} S_{eff}\, [\sigma, \boldsymbol{\pi}] \;&=\; -\, i\; \mathrm{Sp} \log\, [\, i\;\; \partial\!\!\!/ - g\, (\sigma + i\, \gamma_5\, \boldsymbol{\tau})\,] \\ &\qquad - \frac{g^2}{2G} \int d^4x\, (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \end{aligned}$$

ここで

$$\mathrm{Sp}\, \hat{O} \;=\; \int d^4x\; \mathrm{Tr}\, \langle x\, |\, \hat{O}\, |\, x \rangle \qquad (\, \mathrm{Tr} \;\equiv\; \mathrm{tr}_f\, \mathrm{tr}_\gamma\,)$$

saddle point 近似で系の**真空**（基底状態）を決める方程式は

$$\frac{\delta}{\delta \sigma} S_{eff}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}] = \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\pi}} S_{eff}[\sigma, \boldsymbol{\pi}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{G}\sigma &= \frac{\delta}{\delta\sigma}(-i)\,\mathrm{Sp}\log[\,i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})] \\ &= i\,g\ \mathrm{Sp}\,\frac{1}{i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})} \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{g}{G}\sigma &= i\ \mathrm{Sp}\,\frac{1}{i\ \partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})} \\ \frac{g}{G}\boldsymbol{\pi} &= i\ \mathrm{Sp}\,\frac{i\,\gamma_5}{i\ \partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})} \end{aligned}$$

真空は $\pi = 0,\ \sigma = \sigma_0$

$$\sigma_0 = i\,\frac{G}{g}\,\mathrm{Sp}\,\frac{1}{i\ \partial\!\!\!/ - g\sigma_0} \qquad : \quad \textbf{Gap 方程式}$$

具体的には

$$\sigma_0 = \frac{G}{g}\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{i\,(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}_\gamma\left(\frac{1}{g\sigma_0 - \not{k}}\right)$$

$\sigma_0 \neq 0$なる解（非自明解）が存在すれば、基底状態（真空）において**カイラル対称性**は**自発的に破れる**。

この真空を特徴付けるのは、フェルミオン場の零でない凝縮（真空凝縮）である。

$\Downarrow$ **order parameter**

$$\sigma_0 = \langle vac|\,\bar{\psi}\,\psi\,|vac\rangle \neq 0 \quad : \quad \textbf{真空フェルミオン凝縮}$$

Cf. 強磁性体の場合の $\langle J_z \rangle \neq 0$

また、この場合の**Gap方程式**は、自発的対称性の破れによって$M = g\sigma_0$の質量を得たFermi粒子が4-Fermi相互作用$\frac{G}{2}(\bar{\psi}\psi)^2$をすることによって誘起される質量がまた$M = g\sigma_0$になることを要求しているという意味で

Nambu-Jona-Lasinioの自己無撞着条件

と呼ばれる。

$\Downarrow$

残る疑問は、このとき本当に**Goldstone粒子**が現れるかどうかである。これを調べるため、有効作用に戻る。

$$S_{eff}[\sigma, \boldsymbol{\pi}] = -i\,\mathrm{Sp}\log\left[i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})\right] - \frac{g^2}{2G}\int d^4x\,(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$$

作用の Fermion 部分

$$S^F_{eff}[\sigma,\pi] \;=\; -i\;\mathrm{Sp}\log D$$

ただし

$$D \;\equiv\; i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\pi})$$

恒等式

$$\mathrm{Sp}\log D \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\Big[\,(\log D + \log D^\dagger)\;+\;(\log D - \log D^\dagger)\Big]$$

- 右辺第 1 項 $=$ **non-anomalous part**
  $=$ real part of S^{Euclid}

- 右辺第 2 項 $=$ **anomalous-part** (**Wess-Zumino 項**)
  $=$ imaginary part of S^{Euclid}
  $\Rightarrow$ (完全反対称 ε- tensor を含む)

$$\Downarrow$$

flavor SU(2) の場合、anomalous part は 0 になるので以後、non-anomalous part に集中する。

nonanomalous part

$$\mathrm{Sp}\ \log D \ \sim\ \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\log D + \log D^\dagger) \ =\ \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\log\ D^\dagger D$$

σ-field が**真空期待値** $\sigma_0 = \langle 0|\sigma|0\rangle$ を持つことを考慮して、

$$\sigma \ =\ \langle 0\,|\,\sigma\,|\,0\rangle + \sigma' \ =\ \sigma_0 + \sigma'$$

と表すと

$$\begin{aligned} D \ &\equiv\ i\,\partial\!\!\!/ - g\,(\sigma + i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}) \\ &=\ i\,\partial\!\!\!/ - M - g\,(\sigma' + i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

ここで

$$M \ \equiv\ g\,\sigma_0$$

以下に注意して

$$\begin{aligned} D^\dagger \ &=\ -\,i\,\partial\!\!\!/ - M - g\,(\sigma' - i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}) \\ D^\dagger D \ &=\ \partial^2 + M^2 + i\,g\,[\partial\!\!\!/\sigma' + i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\,\partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi}] \\ &\quad + g^2\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + 2\,g\,M\,\sigma' \\ &\equiv\ \partial^2 + M^2 + f(\sigma', \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

with

$$f(\sigma', \boldsymbol{\pi}) \ =\ i\,g\,[\partial\!\!\!/\sigma' + i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\,\partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi}] \ +\ g^2\,(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$$

次式を得る

$$\mathrm{Sp}\log\, D^\dagger D$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, \langle x \,|\, \log\left[\partial^2 + M + f(\sigma', \boldsymbol{\pi}')\right] |\, x\rangle \\
&\sim \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, \langle x \,|\, \log\left[1 + \frac{1}{\partial^2 + M^2} f(\sigma', \boldsymbol{\pi}')\right] |\, x\rangle \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\, \mathrm{Tr}\log\left[1 + \frac{1}{\partial^2 + M^2} f(\sigma', \boldsymbol{\pi}')\right]\, e^{ikx} \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{Tr}\log\left[1 + \frac{1}{(\partial + ik)^2 + M^2} f(\sigma', \boldsymbol{\pi}')\right] \\
&= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\
&\times\ \mathrm{Tr}\log\left[1 - \frac{1}{k^2 - M^2 - (\partial^2 + 2\,i\,k\cdot\partial)} f(\sigma', \boldsymbol{\pi}')\right]
\end{aligned}$$

$\log(1-x)$ の展開 ： $\partial\sigma/M,\ \partial\boldsymbol{\pi}/M$ の巾展開

— **derivative (gradient) expansion** —

- $\displaystyle \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2]^n}$ ： $\begin{cases} n = 1, 2 & : \text{発散} \\ n \geq 3 & : \text{収束} \end{cases}$

展開の低次項

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Sp}\log D^\dagger D \\
=\ & \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\log\left\{1-\frac{1}{k^2-M^2-(\partial^2+2ik\cdot\partial)}\right. \\
& \times\ \left.[\,i\,g\,(\partial\!\!\!/\sigma'+i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\ \partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi})+g^2(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+2\,gM\sigma']\right\} \\
=\ & \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\
\times\ & \left\{-\frac{1}{k^2-M^2}\,\mathrm{Tr}\,[\,i\,g\,(\partial\!\!\!/\sigma'+i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\ \partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi})\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad +g^2\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+2\,gM\sigma'\Big] \\
-\ & \frac{1}{2}\,\frac{1}{(k^2-M^2)^2} \\
\times\ & \mathrm{Tr}\,\Big[i\,g\,(\partial\!\!\!/\sigma'+i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\ \partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi})+\ g^2(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+2\,gM\sigma'\Big] \\
& \times\Big[i\,g\,(\partial\!\!\!/\sigma'+i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\ \partial\!\!\!/\boldsymbol{\pi})+g^2\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+2\,gM\sigma'\Big] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\left. +\ \cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \right\}
\end{aligned}
$$

nonzero terms

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2) &= \mathrm{tr}_\gamma\,\mathrm{tr}_f\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2) \ =\ 8\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2) \\
\mathrm{Tr}\,\sigma' &= 8\,\sigma' \\
\mathrm{Tr}\,[\,\partial\!\!\!/\sigma'\ \partial\!\!\!/\sigma'] &= \mathrm{Tr}\,[\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\sigma'\,\gamma^\nu\,\partial_\nu\,\sigma'] \\
&= 8\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\,\sigma'\partial_\nu\sigma'\ =\ 8\,(\partial_\mu\sigma')^2
\end{aligned}
$$

— 続き —

$$\mathrm{Tr}\,[\,i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\,\not\partial\boldsymbol{\pi}\,i\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\,\not\partial\boldsymbol{\pi}] \;=\; \mathrm{Tr}\,[\,i\,\gamma_5\,\tau_a\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\pi^a\,i\,\gamma_5\,\tau_b\,\gamma^\nu\,\partial_\nu\,\pi^b] \\ =\; 4\,g^{\mu\nu}\cdot 2\,\delta_{ab}\,\partial_\mu\,\pi^a\,\partial_\nu\,\pi^b \;=\; (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)\,] &= 8\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)^2 \\
\mathrm{Tr}\,[\,\sigma'^2] &= 8\,\sigma'^2 \\
\mathrm{Tr}\,[\sigma'(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)] &= 8\,\sigma'(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)
\end{aligned}$$

これらより

$$-\frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}\log D^\dagger D \;=\; -\frac{i}{2}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$
$$\times\;\Big\{-\frac{1}{k^2-M^2}\,[\,8\,g^2\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+16\,gM\sigma'\,]$$
$$-\;\frac{1}{2}\,\frac{1}{(k^2-M^2)^2}\,[\,8\,g^2\,(\partial_\mu\sigma')^2+8\,g^2\,(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2\;+\;8\,g^4\,(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)^2$$
$$+32\,g^2M^2\sigma'^2+32\,g^3M\sigma'(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)]\;\cdots\;\Big\}$$
$$=\;\int d^4x\,\{\,I_2\,[\,g^2(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)+2\,gM\sigma']$$
$$+\;I_0\,\frac{1}{2}\,[(\partial_\mu\sigma')^2+(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2]$$
$$+\;I_0\,\frac{1}{2}\,[\,g^4(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)^2+4\,g^2M^2\sigma'^2+4\,g^3M\sigma'(\sigma'^2+\boldsymbol{\pi}^2)]$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\qquad\}$$

ここで

$$I_2 \;=\; 4\,i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2-M^2)}\quad:\quad \text{2 次発散}$$
$$I_0 \;=\; -4\,i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2-M^2)^2}\quad:\quad \text{対数発散}$$

total effective lagrangian

$$S_{eff}[\sigma, \boldsymbol{\pi}] \;=\; \int \; \mathcal{L}_{eff}(\sigma, \boldsymbol{\pi}) \; d^4x$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{eff}(\sigma, \boldsymbol{\pi}) \\
&= \; I_2 \, [\, g^2 \, (\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + 2 \, gM\sigma'] \; + \; I_0 \; \frac{1}{2} \; [\, (\partial_\mu \sigma')^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] \\
&+ \; I_0 \; \frac{1}{2} \; [\, g^4 \, (\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + 4 \, g^2 M^2 \sigma'^2 + 4 \, g^3 M \sigma' (\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \,] \\
&- \; \frac{g^2}{2G} \, [\, (\sigma' + \sigma_0)^2 + \boldsymbol{\pi}] \; + \; \cdots \\
&= \; g^2 \, I_0 \; \frac{1}{2} \; [\, (\partial_\mu \sigma')^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] \; + \; \left[g^2 I_2 - \frac{g^2}{2G} \right] \boldsymbol{\pi}^2 \\
&+ \; \left[g^2 I_2 - \frac{g^2}{2G} + 2 \, g^2 M^2 I_0 \right] \sigma'^2 \; + \; \left[2gMI_2 - \frac{g^2}{G} \sigma_0 \right] \sigma' \\
&+ \; I_0 \; \frac{1}{2} \; [\, g^4 \, (\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + 4 \, g^3 M \sigma' (\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] \\
&- \; \frac{g^2}{2G} \; \sigma_0^2 \quad + \; \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Gap 方程式

$$\sigma_0 \;=\; \frac{G}{g}\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{g\sigma_0 - \not{k}}\right)$$

は

$$1 \;=\; 2\,G\,I_2$$

と書けるので、**物理的切断** Λ をこの式と π 中間子の運動エネルギー項規格化の条件

$$g^2\,I_0 \;=\; -\,4\,i\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2-M^2)^2} \;=\; 1$$

の両方を満足するように選べば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff}(\sigma,\boldsymbol{\pi}) \;&=\; \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\sigma')^2 + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2 \\ &+\; 2\,M^2\sigma'^2 \\ &+\; \text{interaction term}\end{aligned}$$

これより

- $\boldsymbol{\pi}$ の質量 ： $m_\pi \;=\; 0$ （**Goldstone boson ！**）
- σ' の質量 ： $m_\sigma \;=\; 2\,M$

[注] カイラル対称性の自発的破れによって生じたフェルミオン（反フェルミオン）の質量が M だから、質量 $2M$ のスカラー粒子 σ' に対応する複合場は、ψ-$\bar{\psi}$ 2 フェルミオン・チャンネルの丁度 **threshold** に存在する**共鳴状態**になっていることがわかる。

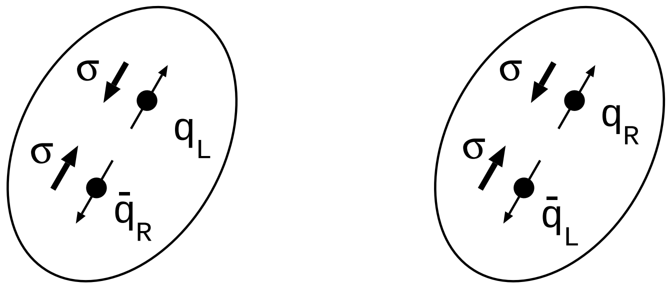
カイラル対称性の自発的破れと π 中間子（物理的描像）

$q\bar{q}$ 対の真空凝縮（質量0のカイラル極限を考える）

$$\left\{ \begin{array}{ccc} q_L & \text{と} & \bar{q}_R \\ q_R & \text{と} & \bar{q}_L \end{array} \right\} \quad : \quad \text{いずれも運動量とスピン逆向き}$$

$$\Downarrow$$

運動量、スピンが逆向きの $q_L\,\bar{q}_R,\ q_R\,\bar{q}_L$ 対を考える。



運動量もスピンも0

超電導体中の**クーパー対**と同様に真空中で**一様な**（方向性を持たない）**Bose-Einstein 凝縮**が可能

荷電対称性 $(u \leftrightarrow d)$、空間反転対称性 $(L \leftrightarrow R)$ を考慮すると

$$\langle \bar{u}_L u_R \rangle = \langle \bar{d}_L d_R \rangle = \langle \bar{u}_R u_L \rangle = \langle \bar{d}_R d_L \rangle = \frac{1}{2}\sigma_0$$

このとき

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = \sigma_0$$

under **isospin roration** $(\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R = \boldsymbol{\alpha})$

$$\begin{aligned} \bar{q}_L\, q_R &\;\to\; \bar{q}_L\, e^{-i\boldsymbol{\theta}_L\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, e^{i\boldsymbol{\theta}_R\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, q_R \;=\; \bar{q}_L\, q_R \\ \bar{q}_R\, q_L &\;\to\; \bar{q}_R\, e^{-i\boldsymbol{\theta}_R\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, e^{i\boldsymbol{\theta}_L\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, q_L \;=\; \bar{q}_R\, q_L \end{aligned}$$

クォーク凝縮は不変に保たれる!

under **axial rotation** $(\boldsymbol{\theta}_L = -\boldsymbol{\theta}_R = -\,\boldsymbol{\beta})$

$$\begin{aligned} \bar{q}_L\, q_R &\;\to\; \bar{q}_L\, e^{-i\boldsymbol{\theta}_L\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, e^{i\boldsymbol{\theta}_R\cdot\boldsymbol{\tau}/}\, q_R \;=\; \bar{q}_L\, e^{+i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}}\, q_R \;\neq\; \bar{q}_L\, q_R \\ \bar{q}_R\, q_L &\;\to\; \bar{q}_R\, e^{-i\boldsymbol{\theta}_R\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, e^{i\boldsymbol{\theta}_L\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\, q_L \;=\; \bar{q}_R\, e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\tau}}\, q_L \;\neq\; \bar{q}_R\, q_L \end{aligned}$$

クォーク凝縮は値を変える!

$$\Downarrow$$

系のハミルトニアンは $[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$ 変換に対して不変であったにもかかわらず、系の**基底状態（真空）**は $q\bar{q}$ 凝縮のためにこの対称性を破り、荷電スピン回転に対する対称性 $[SU(2)]_V$ のみが残る。

$$[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R \longrightarrow [SU(2)]_V$$

特に、荷電スピン第3軸のまわりのaxial rotation

$$\theta_L \;=\; -\,\theta_R \;=\; -\,\theta_3$$

を考えると

$$q_L \;\to\; e^{-i\,\theta_3\,\tau_3/2}\; q_L, \qquad q_R \;\to\; e^{i\,\theta_3\,\tau_3/2}\; q_R$$

このとき

$$\begin{aligned}
\langle \bar{u}_L u_R \rangle \;&\to\; e^{+i\,\theta_3}\,\langle \bar{u}_L u_R \rangle \;=\; \frac{\sigma_0}{2}\,e^{+i\,\theta_3}, \quad \langle \bar{u}_R u_L \rangle \;\to\; \frac{\sigma_0}{2}\,e^{-i\,\theta_3}\\
\langle \bar{d}_L d_R \rangle \;&\to\; e^{-i\,\theta_3}\,\langle \bar{d}_L d_R \rangle \;=\; \frac{\sigma_0}{2}\,e^{-i\,\theta_3}, \quad \langle \bar{d}_R d_L \rangle \;\to\; \frac{\sigma_0}{2}\,e^{+i\,\theta_3}
\end{aligned}$$

元の真空から$[SU(2)]_L \times [SU(2)]_R$変換によって得られるこれらの状態も元の真空と同じエネルギーを持つから、**無限個の縮退した真空の存在**が結論される。しかし、強磁性体のときと同様の理由でこれらの状態は有限のエネルギーで移り変わることができず、真空状態は最初に選んだどれか一つの状態になる。

— **カイラル対称性の自発的破れ** —

真空のまわりの微小エネルギー励起

$$\langle \bar{u}_L u_R \rangle = \langle \bar{d}_R d_L \rangle = \frac{\sigma_0}{2} e^{i\theta_3} = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + i\,\theta_3 - \frac{\theta_3^2}{2} + \cdots\right)$$

$$\langle \bar{u}_R u_L \rangle = \langle \bar{d}_L d_R \rangle = \frac{\sigma_0}{2} e^{-i\theta_3} = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - i\,\theta_3 - \frac{\theta_3^2}{2} + \cdots\right)$$

振動部分の主要項（θ_3 に比例する項）を比較すると

$$\langle \bar{u}_L u_R \rangle = -\langle \bar{u}_R u_L \rangle = \langle \bar{d}_R d_L \rangle = -\langle \bar{d}_L d_R \rangle \Rightarrow -i\,\theta_3 \frac{\sigma_0}{2}$$

パリティ変換$(u_L \leftrightarrow u_R, d_L \leftrightarrow d_R)$により、$q\bar{q}$対凝縮の振動の振幅は符号を変えることがわかる。

$$\Downarrow$$

$q\bar{q}$対凝縮の振動　：　負パリティのボーズ粒子の振動

更にこの$q\bar{q}$対の**スピンは**0ゆえ、$\boldsymbol{J^p = 0^-}$ の**ボーズ粒子**

$$\Downarrow$$

π^0 中間子

同様に荷電スピン$1,2$軸まわりの微小振動を考えると、$\pi^\pm$中間子と同一視できる。

— **Nambu-Goldstone モードとしての**π **中間子** —