

4.4. Generalized Parton Distribution Functions

一般化パートン分布関数 (GPDF) とは？

- Deeply Virtual Compton Scattering (DVCS)
- Deeply Virtual Meson Production (DVMP)

等を通じて測定可能な、Feynmanのパートン分布 (PDF) と電磁形状因子 (FF) の情報を統合、内包する量

どこが面白いのか？

(1) 核子中のクォークが運ぶ軌道角運動量を純粋に実験的に決定する手段を提供する。

“ **核子スピンの謎** ” を解くための最も直接的な道具

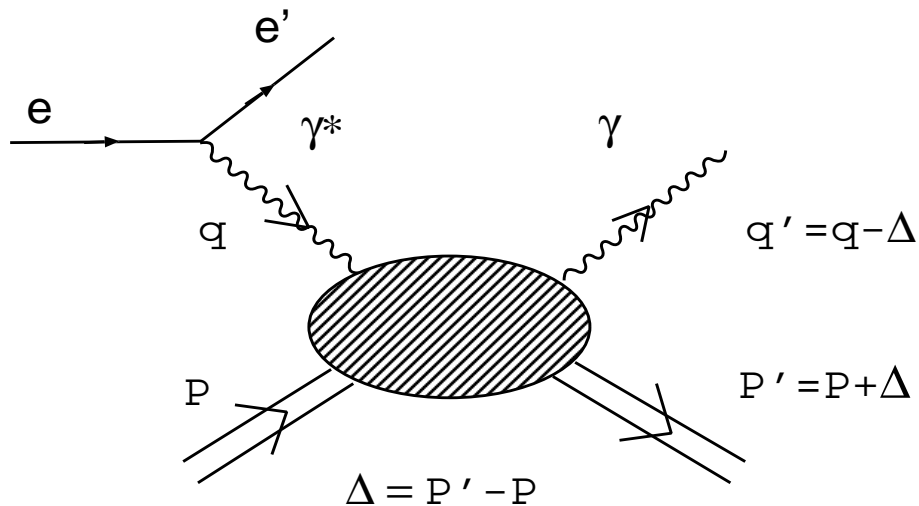
(2) 核子のクォーク・グルオン構造の**最も詳しい情報**を与える物理量である。

{ 衝突係数依存パートン分布
量子力学的位相空間パートン分布 }

⇕

医療分野の CT (Computer Tomography)

核子の深部仮想コンプトン散乱 (DVCS)



- 通常の Compton 散乱と異なるのは、始状態の光子が電子との間で交換される仮想光子であること
- 運動量移行とエネルギー移行が独立に自由に換えられる

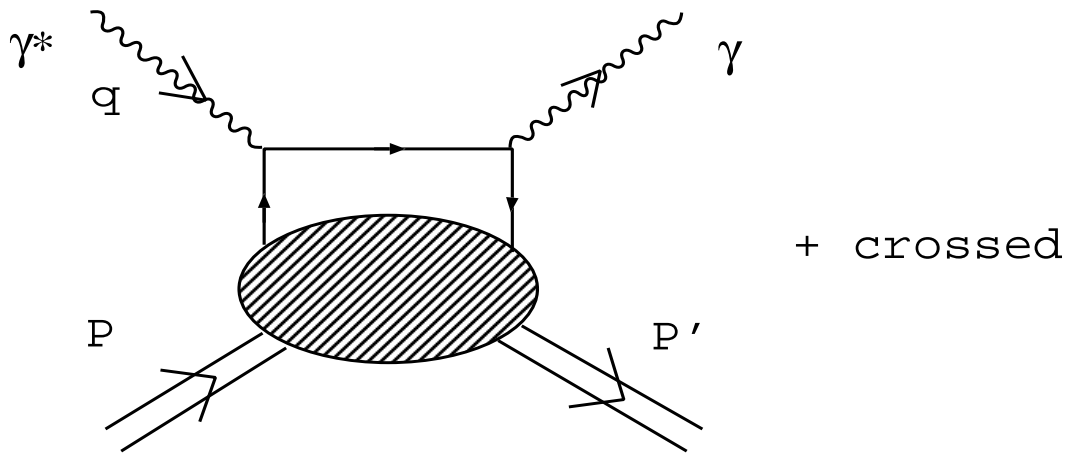
深部非弾性散乱の kinematics が実現可能

$$Q^2 \equiv q^2 \rightarrow \infty, \quad P \cdot q \rightarrow \infty, \quad \frac{Q^2}{P \cdot q} = \text{有限}$$

— Bjorken limit —

DIS process ⇒ 摂動論的 QCD が適用できる

Leading Feynman diagram for DVCS



Compton amplitude $T^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 & T^{\mu\nu}(P, q, \Delta \equiv P' - P) \\
 &= -\frac{1}{2} (p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu - q^{\mu\nu}) \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1}{x - \xi/2 + i\varepsilon} + \frac{1}{x + \xi/2 - i\varepsilon} \right) \\
 &\times \left[H(x, t, \xi) \bar{U}(P') \not{n} U(P) + E(x, t, \xi) \bar{U}(P') \frac{i\sigma^{\alpha\beta} n_\alpha \Delta_\beta}{2M} U(P) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

$H(x, t, \xi), E(x, t, \xi)$: 一般化パートン分布関数 (GPDF)

3個の運動学的変数

$$\begin{aligned}
 t &= (P' - P)^2 & : & \text{核子の4元運動量移行} \\
 x &= \frac{Q^2}{2P \cdot q} & : & \text{Bjorken 変数} \\
 \xi &= n \cdot \Delta & : & \text{skewdness パラメター}
 \end{aligned}$$

n^μ は以下の条件を満たす light-cone vector

$$n^2 = 0, \quad n \cdot (P' + P) = 0$$

[補足] 3個の運動学的変数についての補足

$$t = (P' - P)^2 \quad : \quad \text{核子の4元運動量移行}$$

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad : \quad \text{Bjorken 変数}$$

核子中で反応に関与するパートンの始状態と終状態の

longitudinal momentum fraction の平均

$$\xi = n \cdot (P' - P) \quad : \quad \text{skewdness パラメター}$$

核子中で反応に関与するパートンの始状態と終状態の

longitudinal momentum fraction の差



skewdness paramter の名前の由来

あるいは

$$\xi \sim \text{核子の運動量移行の縦方向成分}$$

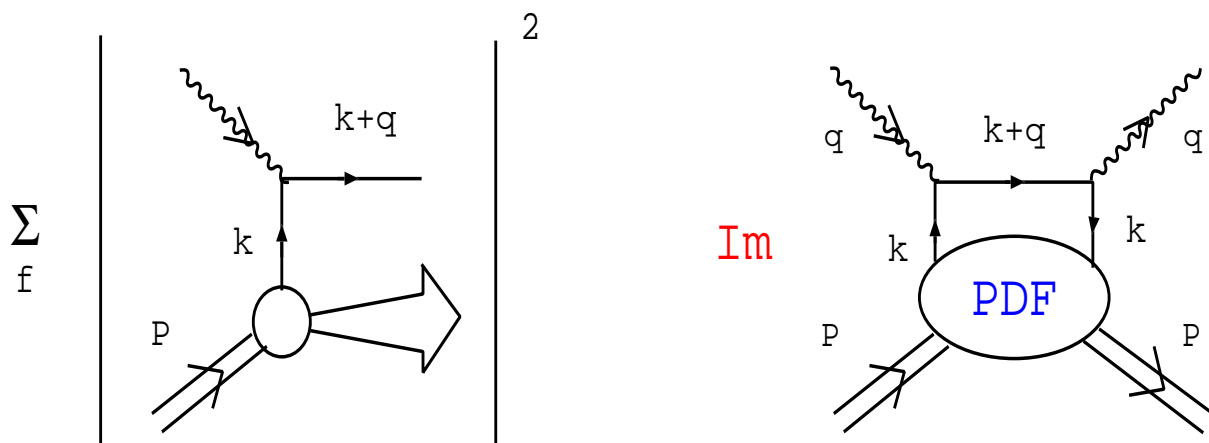


つまり、核子への運動量移行が横方向成分しかなければ

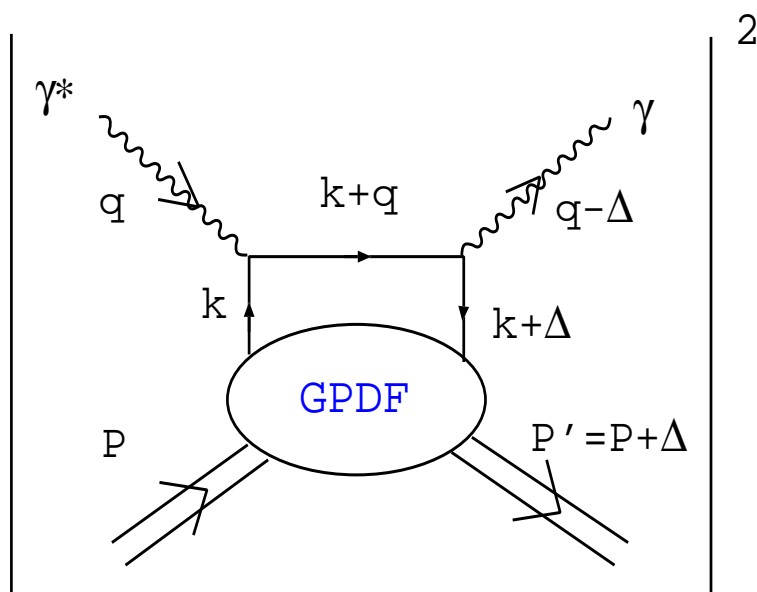
$$\xi = 0$$

[補足] Inclusive scattering と DVCS の関係

inclusive scattering



DVCS



PDF と GPDF の関係についての考察

通常のパートン分布関数 (PDF)

$$q(x) = \langle P | O(x) | P \rangle, \quad |P\rangle : \text{運動量 } P \text{ の核子状態}$$

$O(x)$ は **Light-cone 演算子**

$$O(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \bar{\psi} \left(-\frac{\lambda n}{2} \right) \not{n} \mathcal{L}_g \psi \left(\frac{\lambda n}{2} \right)$$

ここで

$$\mathcal{L}_g \quad : \quad \text{gauge link}$$

$$n \propto (1, 0, 0, -1) \quad : \quad \text{light-like vector}$$

すなわち

Parton Distribution Function



核子中の **クォーク・クォーク光円錐相関**

Light-cone 演算子 $O(x)$ は次の局所演算子群と等価

$$\begin{aligned}
 O^{\mu_1} &= \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi && \text{クォークの運ぶ電磁流} \\
 O^{\{\mu_1, \mu_2\}} &= \bar{\psi} \gamma^{(\mu_1} i D^{\mu_2)} \psi && \text{エネルギー・運動量テンソルのクォーク部分} \\
 O^{\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}} &= \bar{\psi} \gamma^{(\mu_1} i D^{\mu_2} i D^{\mu_3)} \psi \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

同一運動量の核子状態行列要素

$$\langle P | O^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} | P \rangle = a_n \cdot 2 P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

a_n は摂動論的 QCD では計算できない!

クォーク分布関数 (PDF) の定義

$$\int_{-1}^1 x^{n-1} q(x) dx = a_n \quad (\text{Mellin 変換})$$

または

$$q(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-n} a_n dn \quad (\text{逆 Mellin 変換})$$

同じ演算子の異なる運動量の（非前方）核子間行列要素

（簡単のため $\xi = 0$ の場合に話を限る）

$$\begin{aligned}\langle P' | O^{\mu_1} | P \rangle &= A_{10}(t) \cdot \bar{U}(P') \gamma^{\mu_1} U(P) \\ &+ B_{10}(t) \cdot \frac{i}{2M} \bar{U}(P') \sigma^{\mu_1 \alpha} \Delta_\alpha U(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P' | O^{\{\mu_1, \mu_2\}} | P \rangle &= A_{20}(t) \cdot \bar{P}^{\{\mu_1} \bar{U}(P') \gamma^{\mu_2\}} U(P) \\ &+ B_{20}(t) \cdot \frac{i}{2M} \bar{P}^{\{\mu_1} \bar{U}(P') \sigma^{\mu_2\} \alpha} \Delta_\alpha U(P) \\ &+ C_{20}(t) \cdot \frac{1}{M} \Delta^{\{\mu_1} \Delta^{\mu_2\}}\end{aligned}$$

...

ここで

$$\Delta = P' - P, \quad \bar{P} = \frac{1}{2}(P' + P)$$

特に

$$\begin{aligned}A_{10}(t) &= F_1(t) & : & \text{Dirac F.F.} \\ B_{10}(t) &= F_2(t) & : & \text{Pauli F.F.}\end{aligned}$$

この理由で

$$A_{n0}(t), B_{n0}(t), C_{n0}(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

は generalized form factor と呼ばれる。

一般化クォーク分布 ($\xi = 0$ のもの) の定義

$$\int x^{n-1} H(x, 0, t) dx = A_{n0}(t)$$
$$\int x^{n-1} E(x, 0, t) dx = B_{n0}(t)$$

明らかに

$$A_{n0}(t=0) = a_n$$

だから

$$H(x, 0, 0) = q(x)$$

すなわち、 $H(x, \xi, t)$ の前方極限 ($P' \rightarrow P$, or $t \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$) は通常 $q(x)$ に帰着。

MIT の Negele らのグループは Lattice QCD で

$$A_{10}(t), A_{20}(t), A_{30}(t)$$
$$B_{10}(t), B_{20}(t)$$

等の **generalized form factor** を計算した。

↓ 何故これらが面白いのか？

Ji の核子スピン和則

$$\frac{1}{2} = J^q + J^g = \frac{1}{2} (A_{20}(0) + B_{20}(0))^{q+g}$$

ところで、 J^q はクォークの固有スピンの寄与 $(1/2) \Delta\Sigma$ と軌道角運動量の寄与 L^q に分解できるから

$$J^q = \frac{1}{2} \Delta\Sigma + L^q = \frac{1}{2} (A_{20}^q(0) + B_{20}^q(0))$$

ここで

$$A_{20}^q(0) = \int_{-1}^1 x H^q(x, 0, 0) dx = \int_{-1}^1 x q(x) dx \equiv \langle x \rangle^q$$

$\langle x \rangle^q$: クォーク q が運ぶ **momentum fraction**

に注意すると

$$L^q = \frac{1}{2} (\langle x \rangle^q + B_{20}^q(0) - \Delta\Sigma)$$

$\langle x \rangle^q$ と $\Delta\Sigma$ は実験的にかなりよくわかっている。

↓

$B_{20}^q(0)$ が実験的にも、理論的にも**未知の量**

↓

原理的には DVCS 実験で測定可能 !

Negele 等のグループの Lattice 計算

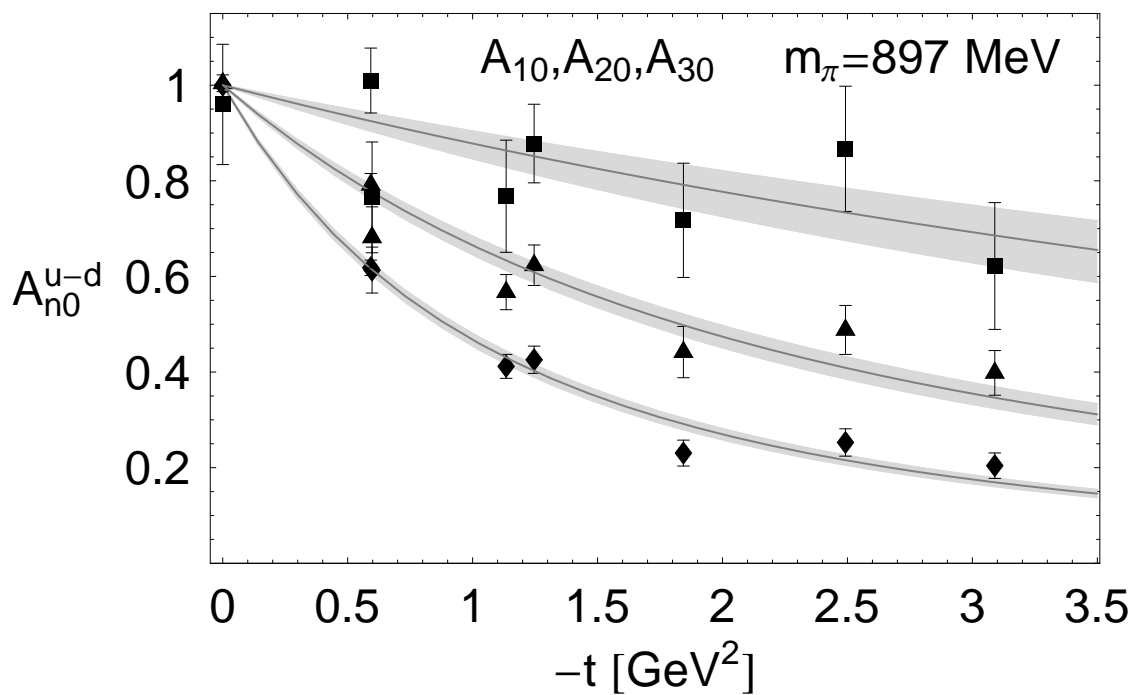
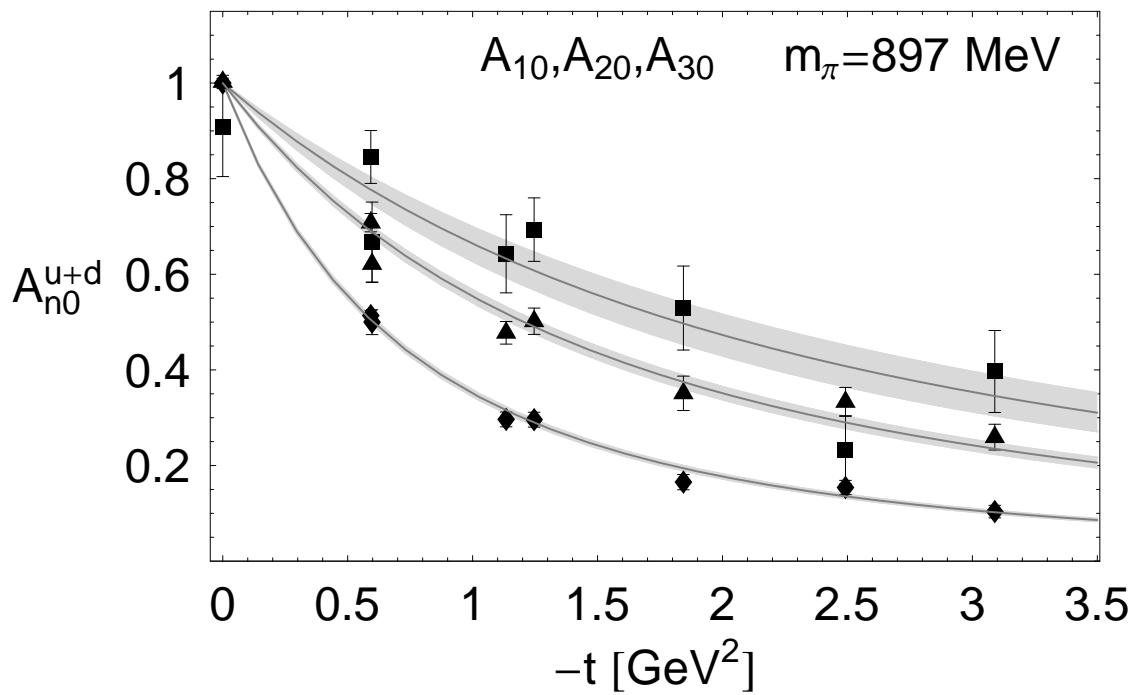
- Wilson fermion at $\beta = 5.6$
- $m_\pi \simeq 897 \text{ MeV}$ ($\kappa = 0.1560$)
- dynamical QCD calculation (with fermion loops)

(but neglect disconnected diagram)

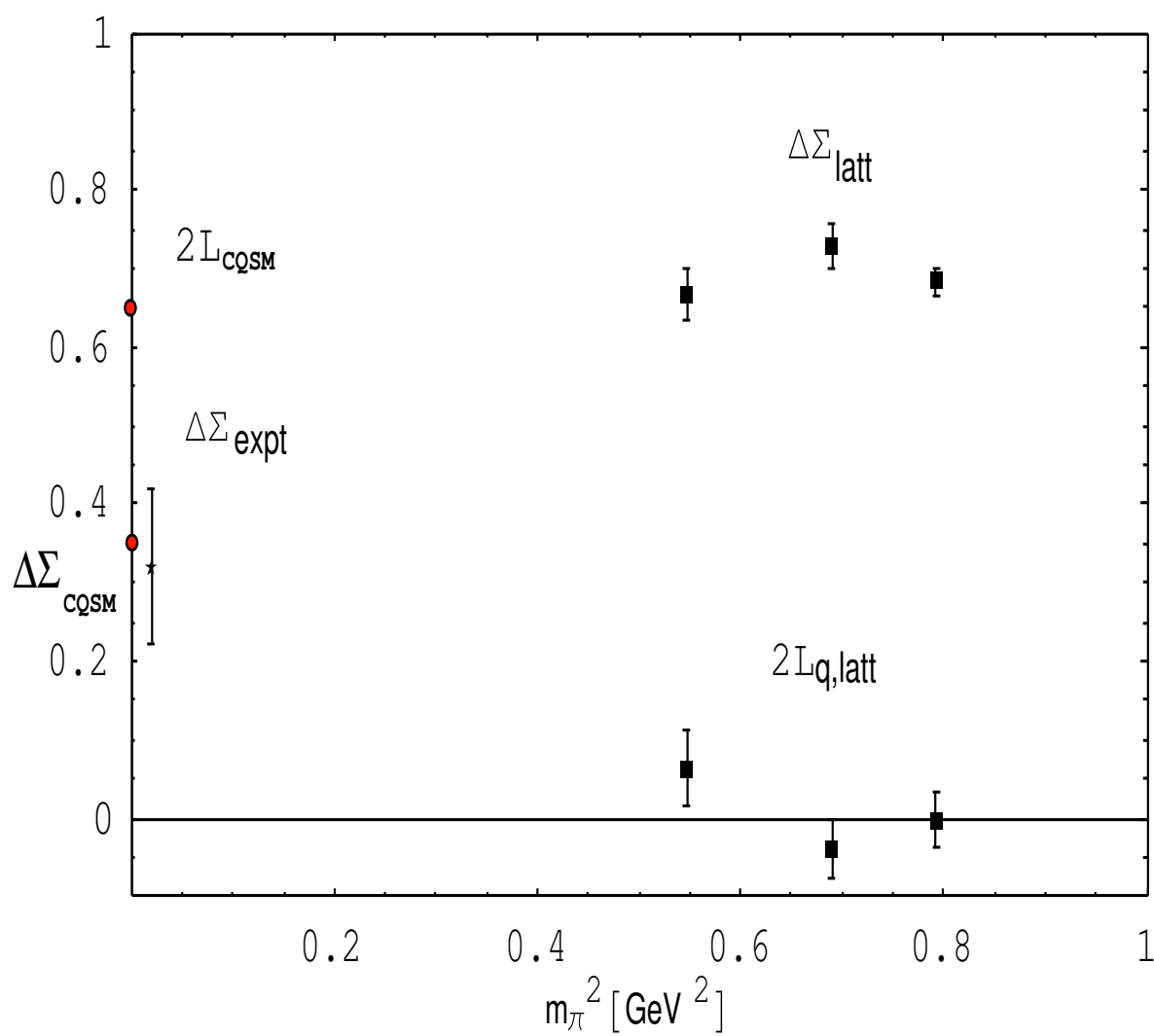
- lattice size $16^3 \times 32$

physical lattice extension $\sim 1.6 \text{ fm}$

generalized form factor in Lattice QCD



Nucleon Spin Contents in Lattice QCD



Lattice QCD の予言

$$\frac{1}{2} \Delta \Sigma \simeq \frac{1}{2} \times 0.682 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} J^q &= \frac{1}{2} \left[A_{20}^{u+d}(0) + B_{20}^{u+d}(0) \right] \\ &\sim \frac{1}{2} \left[\langle x \rangle^u + \langle x \rangle^d + 0 \right] \sim \frac{1}{2} \times 0.675 \quad (7) \end{aligned}$$

↓

$$L^q \simeq -0.0035 \quad : \text{ very small ?}$$

しかし肝心の $\Delta \Sigma$ に対する予言が実験値

$$\frac{1}{2} \Delta \Sigma^{exp} \simeq \frac{1}{2} \times (0.22 \pm 0.17)$$

とかけ離れている。

↓

far from real world (= chiral regime) !

核子構造と位相空間トモグラフィ

- J.P. Ralston and B. Pire, Phys. Rev. D66 (2002) 111501(R)
- A.V. Belitsky et al., Phys. Rev. D69 (2004) 074014

Wigner 分布 $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

位相空間の古典的確率密度分布 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ の量子力学版

1 次元空間の量子力学の場合

$$W(x, p) \equiv \int d\eta e^{ip\eta} \psi^* \left(x - \frac{\eta}{2} \right) \psi \left(x + \frac{\eta}{2} \right)$$

基本的な性質

- $\int W(x, p) dx = |\tilde{\psi}(p)|^2 \quad (\geq 0) \quad :$ 運動量分布
- $\int W(x, p) dp = |\psi(x)|^2 \quad (\geq 0) \quad :$ 座標空間の確率密度分布

任意の x, p に対しては

$W(x, p) : \text{必ずしも正定値ではない}$



量子力学の不確定性関係の制限

位相空間パートン分布

- 核子の電荷密度分布の最も自然な定義を与えるのは電磁流演算子の Breit 系の行列要素のフーリエ変換

$$\rho(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left\langle N\left(\frac{\vec{q}}{2}\right) \left| \hat{J}^0(0) \right| N\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right) \right\rangle$$

$$\hat{J}^\mu(\vec{r}) = \bar{\psi}(\vec{r}) \gamma^\mu \psi(\vec{r})$$

- 位相空間クォーク分布への一般化 : $\hat{J}^0(\mathbf{r}) \Rightarrow \hat{W}_\Gamma(\mathbf{r}, x)$

$$f_\Gamma(\vec{r}, x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left\langle N\left(\frac{\vec{q}}{2}\right) \left| \hat{W}_\Gamma(0, x) \right| N\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right) \right\rangle$$

$$\hat{W}_\Gamma(\vec{r}, x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \bar{\psi}\left(\vec{r} - \frac{\lambda n}{2}\right) \Gamma \psi\left(\vec{r} + \frac{\lambda n}{2}\right)$$

位相空間クォーク分布は Feynman 運動量変数 x にも依存するのでパートン分布の定義式と同様に

λn だけ光円錐的に離れたクォーク場の積のフーリエ変換が現れる。(x が距離 λ に共役な運動量変数)

↓

Feynman 運動量 x とクォークの空間座標 \mathbf{r} の両方に依存する

位相空間クォーク分布 $f_\Gamma(\mathbf{r}, x)$

位相空間パートン分布と GPDF の関係

- 位相空間クォーク分布の定義式に現れる $\hat{W}_\Gamma(0, x)$ の核子行列要素は本質的に GPDF そのもの

$$\left\langle \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \hat{W}_\Gamma(0, x) \right| -\frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \left\langle \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \bar{\psi}(\vec{r} - \frac{\lambda n}{2}) \Gamma \psi(\vec{r} + \frac{\lambda n}{2}) \right| -\frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle$$

実際、右辺は、GPDF の定義式で

$$\mathbf{P} \longrightarrow -\mathbf{q}/2, \quad \mathbf{P}' \longrightarrow +\mathbf{q}/2, \quad (\text{Breit frame})$$

ゆえに

$$\left\langle \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \hat{W}_\Gamma(0, x) \right| -\frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle \sim F_\Gamma \left(x, \xi = \frac{q_3}{2E_{q/2}}, t = -\mathbf{q}^2 \right)$$

↓

$$f_\Gamma(\mathbf{r}, x) \sim \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} F_\Gamma(x, \xi, t)$$

位相空間パートン分布 \iff GPDF

フーリエ変換

GPDF の完全な情報が得られれば、Feynman 運動量 x 毎に

核子中のパートンの 3 次元像

が構成できる。

↓

核子構造の量子力学的位相空間トモグラフィー

衝突係数依存パートン分布

- M. Burkardt, Phys. Rev. D62 (2000) 071503

— 歴史的にはこちらが先 —

位相空間パートン分布を対称軸の座標 z について積分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\Gamma}(\mathbf{r}, x) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} F_{\Gamma}(x, \xi, t) \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i \mathbf{q}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}} F_{\Gamma}(x, 0, t)|_{q_3=0} \\ &= \mathcal{F}_{\Gamma}(\mathbf{r}_{\perp}, x)\end{aligned}$$

2つの変数の関数

- x : 縦方向の運動量比 (Feynman 変数)
- \mathbf{r}_{\perp} : 横方向の空間座標 (衝突係数)

著しい特徴

x と \mathbf{r}_{\perp} は不確定性の制約を受けない

↓

正值性を満たす (確率解釈可能)

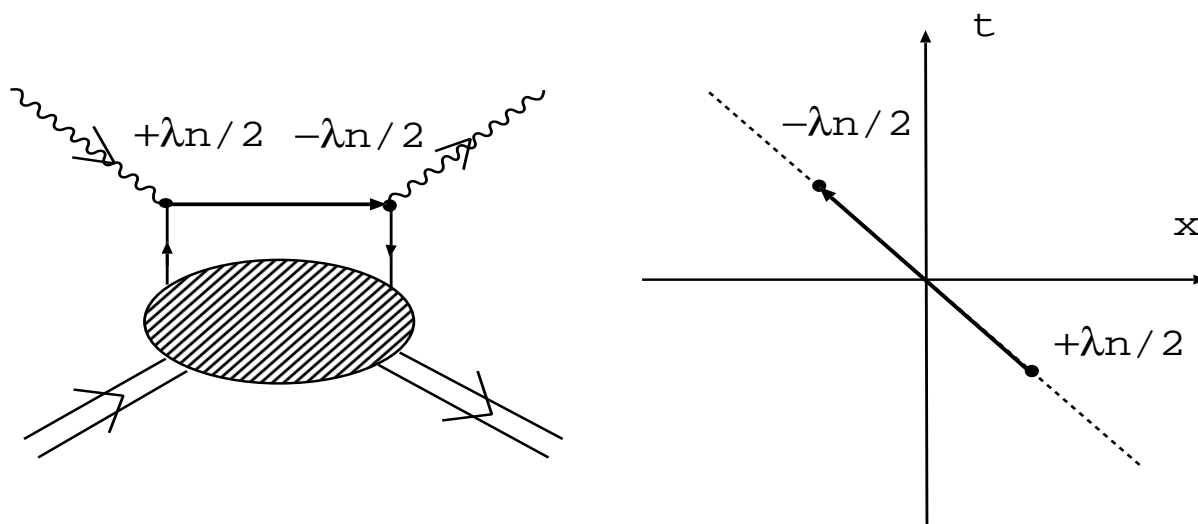
位相空間パートン分布の予想図

- A.V. Belitsky et al., Phys. Rev. D69 (2004) 074014

- 左から $x = 0.01, 0.40, 0.70$ に対応

- 分布は縦方向 (z -軸方向) に軸対称性を持つ

GPDF と核子スピン和則 (モーメント和則) 再考



$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P' | \bar{\psi}(-\lambda n/2) \gamma^\mu \psi(\lambda n/2) | P \rangle \\
 &= H(x, \xi, t) \bar{U}(P') \gamma^5 U(P) \\
 &+ E(x, \xi, t) \bar{U}(P') \frac{i\sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu}{2M} U(P) + \dots
 \end{aligned}$$

GPDF は通常の PDF の情報と核子の電磁形状因子の情報を同時に含んでいる

- 前方極限で $P' \rightarrow P$ ($t \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$)

$$H(x, 0, 0) = q(x) : \text{通常の非偏極分布関数}$$

$$E(x, 0, 0) = e(x) : \text{全く新しい分布関数}$$

• GPDF の 1 次 (最低次) のモーメント

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 dx H(x, \xi, t) = F_1(t) & : \text{Dirac F.F.} \\ \int_{-1}^1 dx E(x, \xi, t) = F_2(t) & : \text{Pauli F.F.} \end{cases}$$

()

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 H(x, \xi, t) dx \cdot \bar{U}(P') \gamma^5 U(P) \\ + & \int_{-1}^1 E(x, \xi, t) dx \cdot \bar{U}(P') \frac{i \sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu}{2M} U(P) \\ = & \int_{-1}^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P' | \bar{\psi}(-\lambda n/2) \gamma^\mu \psi(\lambda n/2) | P \rangle \\ = & \int_{-1}^1 d\lambda \delta(\lambda) e^{i\lambda x} \langle P' | \bar{\psi}(-\lambda n/2) \gamma^\mu \psi(\lambda n/2) | P \rangle \\ = & \langle P' | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) | P \rangle \\ = & F_1(t) \bar{U}(P') \gamma^\mu U(P) + F_2(t) \bar{U}(P') \frac{i \sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu}{2M} U(P) \end{aligned}$$

↑

最後の等式は電磁形状因子の定義式に他ならない！

GPDF の 2 次のモーメントとクォーク角運動量

クォークの角運動量演算子 (QCD における)

$$\hat{J}_q^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \int d^3x \left(x^j T_q^{0k} - x^k T_q^{0j} \right)$$

$$T_q^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \psi \gamma^{(\mu} i \overleftrightarrow{D}^{\nu)} \psi + \bar{\psi} \gamma^{(\mu} i \overleftrightarrow{D}^{\nu)} \psi \right\}$$

$T_q^{\mu\nu}$: QCD のエネルギー・運動量テンソルのクォーク部分

$$\begin{aligned} J_q &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\langle \bar{P} + \frac{\Delta}{2} \left| \hat{J}_q^i \right| \bar{P} - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \int d^3x e^{-i\Delta \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \left\langle \bar{P} + \frac{\Delta}{2} \left| x^i T^{0k} - x^k T^{0j} \right| \hat{P} - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \int d^3x \\ &\quad \times \left[\left\langle \hat{P} + \frac{\Delta}{2} \left| \left(i \frac{\partial}{\partial \Delta^j} e^{-i\Delta \cdot \mathbf{x}} \right) T^{0k} - (j \leftrightarrow k) \right| \hat{P} - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \\ &\quad \times \left[-i \frac{\partial}{\partial \Delta^j} \left\langle \bar{P} + \frac{\Delta}{2} \left| T^{0k} \right| \bar{P} - \frac{\Delta}{2} \right\rangle - (j \leftrightarrow k) \right] \end{aligned}$$

エネルギー運動量テンソル $T_q^{\mu\nu}$ の核子行列要素

$$\begin{aligned} & \langle P' | T_q^{\mu\nu} | P \rangle \\ &= \bar{U}(P') \left[A_q(t) \gamma^{(\mu} \bar{P}^{\nu)} + B_q(t) \bar{P}^{(\mu} i\sigma^{\nu)\alpha} \frac{\Delta_\alpha}{2M} \right. \\ & \quad \left. + C_q(t) \frac{\Delta^\mu \Delta^\nu - q^{\mu\nu} \Delta^2}{M} + \dots \right] U(P) \end{aligned}$$

ただし

$$\bar{P} = \frac{1}{2} (P' + P), \quad \Delta = P' - P, \quad t = \Delta^2$$

これより次の関係式が生じる

$$J_q = \frac{1}{2} [A_q(0) + B_q(0)]$$

左辺 = クォークが運ぶ全角運動量

右辺 = エネルギー運動量テンソルの核子行列要素
として定義された形状因子の前方極限

更に、以前に示したように、 $A_q(t), B_q(t)$ の前方極限は $H_q(x, 0, 0), E_q(x, 0, 0)$ の2次のモーメントと一致する。

$$\begin{aligned} A_q(0) &= \int_{-1}^1 x H_q(x, 0, 0) dx \\ B_q(0) &= \int_{-1}^1 x E_q(x, 0, 0) dx \end{aligned}$$

つまり一般化パートン分布 $H_q(x, \xi, t)$, $E_q(x, \xi, t)$ の2次のモーメントと核子中のクォーク全角運動量の間に関係が存在することになる。

$$J_q = \frac{1}{2} [H_q^{(2)}(0, 0) + E_q^{(2)}(0, 0)]$$

この関係式は高次微分を含む演算子のタワーを考えることにより、高次のモーメントの関係式に一般化できる。

$$\begin{aligned} J_q^{(n)} &= \frac{1}{2} [H_q^{(n+1)}(0, 0) + E_q^{(n+1)}(0, 0)] \\ &= \frac{1}{2} [q^{(n+1)} + e_q^{(n+1)}] \end{aligned}$$

これは分布関係の関係式にやき直すと

$$J_q(x) = \frac{1}{2} x [q(x) + e_q(x)] \quad : \text{ Ji の角運動量和則}$$

ここで

$q(x)$: 非偏極分布関数

$e_q(x)$: DVCS で測定可能な新分布関数

クォークのヘリシティ分布 $\Delta q(x)$ は既に測定済みだから $J_q(x)$ がわかれば

$$L_q(x) = J_q(x) - \frac{1}{2} \Delta q(x)$$

によりクォークの軌道角運動量分布 $L_q(x)$ も純粹に実験的に決められる！

$e^q(x)$ に対する QCD 和則 (general QCD sum rule)

(I) 1 次モーメント

$$\int_{-1}^1 e^{(I=0)}(x) dx = \int_{-1}^1 [e^u(x) + e^d(x)] dx = 3(\kappa_p + \kappa_n)$$

$$\int_{-1}^1 e^{(I=1)}(x) dx = \int_{-1}^1 [e^u(x) - e^d(x)] dx = \kappa_p - \kappa_n$$

κ_p, κ_n : 陽子と中性子の異常磁気能率

$$e(x) \Downarrow$$

核子の異常磁気能率の Feynman 運動量 x -空間の分布!

(II) 2 次モーメント

$$\int_{-1}^1 x e^{(I=0)}(x) dx = 2(J^u + J^d) - (M^u + M^d)$$

$$\int_{-1}^1 x e^{(I=1)}(x) dx = 2(J^u - J^d) - (M^u - M^d)$$

ただし M^u, M^d は以下の total quark momentum fraction

$$M^u \equiv \int_{-1}^1 x u(x) dx$$

$$M^d \equiv \int_{-1}^1 x d(x) dx$$

CQSMにおける GPDF

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P', S'_3 | \bar{\psi}(-\lambda n/2) \not{n} \psi(\lambda n/2) | P, S_3 \rangle \\
 &= H(x, \xi, t) \bar{U}(P', S'_3) \not{n} U(P, S_3) \\
 &+ E(x, \xi, t) \bar{U}(P', S'_3) \frac{i \sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} U(P, S_3) \\
 &\sim \delta_{S'_3 S_3} H_E(x, \xi, \Delta^2) - \frac{i}{2M_N} \varepsilon^{3jk} \Delta_j (\sigma^k)_{S'_3 S_3} E_M(x, \xi, t)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 H_E(x, \xi, t) &= H(x, \xi, t) + \frac{t}{4M_N^2} E(x, \xi, t) \\
 E_M(x, \xi, t) &= H(x, \xi, t) + E(x, \xi, t)
 \end{aligned}$$

前方極限

$$\begin{aligned}
 q(x) &= H_E(x, 0, 0) = H(x, 0, 0) \\
 e_M(x) &\equiv E_M(x, 0, 0) = H(x, 0, 0) + E(x, 0, 0)
 \end{aligned}$$

模型に特徴的な Ω 依存性

ソリトンの集団回転角速度 $\Omega \sim O(1/N_c)$

$$\begin{aligned}
 q^{(I=0)}(x) &\sim O(\Omega^0) \\
 q^{(I=1)}(x) &\sim O(\Omega^1) \\
 \tilde{e}^{(I=0)}(x) &\sim O(\Omega^1) \\
 \tilde{e}^{(I=1)}(x) &\sim O(\Omega^0)
 \end{aligned}$$

理論式

$$q^{(I=0)}(x) \sim M_N N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (1 + \gamma^0 \gamma^3) \delta_n | n \rangle$$

$$q^{(I=1)}(x) \sim M_N \frac{N_c}{2I} \sum_{m=all, n \leq 0} \left(\frac{1}{E_m - E_n} - \frac{1}{2M_N} \frac{d}{dx} \right) \\ \times \langle n | \tau_a | m \rangle \langle m | \tau_a (1 + \gamma_0 \gamma_3) \delta_n | n \rangle$$

$$e_M^{(I=1)}(x) \sim \frac{1}{3} M_N^2 N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau})_3 (1 + \gamma^0 \gamma^3) \delta_n | n \rangle$$

$$e_M^{(I=0)}(x) \sim -i \frac{\sqrt{2}}{3} M_N^2 \sum_{\nu, \nu'} \langle 1\nu 1\nu' | 10 \rangle \\ \times \frac{N_c}{2I} \sum_{m=all, n \leq 0} \left(\frac{1}{E_m - E_n} - \frac{1}{2M_N} \frac{d}{dx} \right) \\ \times \langle n | \hat{x}_\nu (1 + \gamma^0 \gamma^3) \delta_n | m \rangle \langle m | \tau'_\nu | n \rangle$$

平均場中の1粒子クォーク状態

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle, \quad H = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + \beta M e^{i\gamma_5} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)$$

また

$$\delta_n \equiv \delta(xM_N - E_n - \hat{p}_3)$$

ここで

\hat{p}_3 は運動量演算子の z 方向成分

モーメント和則

(I) 1 次のモーメント

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 e_M^{(I=1)}(x) dx \\ &= -\frac{M_N}{9} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\tau} | n \rangle \\ &= \mu^{(I=1)} \quad (\text{核子のアイソベクトル磁気能率}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 e_M^{(I=0)}(x) dx \\ &= -\frac{M_N}{3} \cdot \frac{N_c}{2I} \sum_{m>0, n \leq 0} \frac{\langle n | (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha})_3 | m \rangle \langle m | \tau_3 | n \rangle}{E_m - E_n} \\ &= 3 \mu^{(I=0)} \quad (\text{核子のアイソスカラー磁気能率}) \end{aligned}$$

(II) 2 次のモーメント

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=1)}(x) dx &= J^u - J^d = J^{(I=1)} \quad ? \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=0)}(x) dx &= J^u + J^d = J^{(I=0)} \quad ? \end{aligned}$$

$e(x) \equiv e_M(x) - q(x)$ を思い出すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e^{(I=1)}(x) dx &= [J^u - J^d] - \frac{1}{2} [M^u - M^d] \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e^{(I=0)}(x) dx &= [J^u + J^d] - \frac{1}{2} [M^u + M^d] \end{aligned}$$

CQSM は、グルオンの自由度を顕わに含まない

—— 有効クォーク模型 ——

なので

$$\begin{aligned} J^u + J^d &= \frac{1}{2} && : \text{ (全クォークスピン) } \\ M^u + M^d &= 1 && : \text{ (エネルギー運動量和則) } \end{aligned}$$

↓

$$\int_{-1}^1 x e^{(I=0)}(x) dx = 0$$

実際、 $e_M^{(I=0)}(x)$ の顕わな表式を基に以下の関係式が証明できる。

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=0)}(x) dx = L_f^{(I=0)} + \frac{1}{2} \Delta\Sigma^{(I=0)} = \frac{1}{2}$$

ただし

$$\begin{aligned} L_f^{(I=0)} &= -\frac{1}{I} \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n\leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n | \tau_3 | m \rangle \langle m | (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}})_3 | n \rangle \\ \Delta\Sigma^{(I=0)} &= -\frac{1}{I} \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n\leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n | \tau_3 | m \rangle \langle m | \Sigma_3 | n \rangle \end{aligned}$$

ここで

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad \Leftarrow \quad \text{軌道角運動量演算子の自由場表式}$$

つまり、 $e_M^{(I=0)}(x)$ の2次のモーメント和則は M.W + Yoshiki (1991) の核子スピン和則に帰着する。

アイソベクトル部分はどうか？

$$e_M^{(I=1)}(x) = \frac{1}{3} M_N^2 N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau})_3 (1 + \gamma^0 \gamma^3) \delta(x M_n - E_n - \hat{p}_3) | n \rangle$$

より

$$\int_{-1}^1 x e_M^{(I=1)}(x) dx = \frac{1}{3} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau}) (1 + \alpha_3) (E_n + \hat{p}_3) | n \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=1)}(x) dx &= \frac{1}{3} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 E_n | n \rangle \\ &+ \frac{1}{3} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \alpha_3 E_n | n \rangle \\ &+ \frac{1}{3} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \hat{p}_3 | n \rangle \\ &+ \frac{1}{3} N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \alpha_3 \hat{p}_3 | n \rangle \\ &\equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \end{aligned}$$

Dirac 方程式

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

with

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + M \beta (\cos F(r) + i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \sin F(r))$$

を用いて

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{2} \langle n | \{ (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3, H \} | n \rangle \\ &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{2} \langle n | -i (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 - 2 (\boldsymbol{\tau} \times \hat{\boldsymbol{x}})_3 \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} | n \rangle \end{aligned}$$

M_1 項は hedgehog 配位の grand spin K が 0 なので $M_1 = 0$ 。

M_4 項はパリティで 0 になる。実際

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|n\rangle &= (-1)^{P_n}|n\rangle \\ \mathcal{P}(\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \mathcal{P}^{-1} &= -(\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3, \\ \mathcal{P}\alpha_3 \mathcal{P}^{-1} &= -\alpha_3, \\ \mathcal{P}\hat{p}_3 \mathcal{P}^{-1} &= -\hat{p}_3\end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned}M_4 &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \langle n | \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} (\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \alpha_3 \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \hat{p}_3 \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} |n\rangle \\ &= \{(-1)^{P_n}\}^2 (-1)^3 M_4 = -M_4 = 0\end{aligned}$$

残る M_3, M_2 項に対して以下の式が証明できる。

$$\begin{aligned}M_3 &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \langle n | (\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \hat{p}_3 |n\rangle = \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{3} \langle n | (\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot \hat{\mathbf{p}} |n\rangle \\ &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \left(-\frac{1}{3}\right) \langle n | \boldsymbol{\tau} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}) |n\rangle = -\frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \langle n | \tau_3 L_3 |n\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{2} \langle n | \{(\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \alpha_3, H\} |n\rangle \\ &= \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{2} \langle n | \{(\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \alpha_3, \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{p}_3 \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{p}_3\} |n\rangle \\ &+ \frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \frac{1}{2} \langle n | \{(\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\tau})_3 \alpha_3, M\beta (\cos F(r) + \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} \sin F(r))\} |n\rangle \\ &= -\frac{N_c}{3} \sum_{n \leq 0} \langle n | \tau_3 L_3 + \tau_3 \Sigma_3 |n\rangle \\ &- M \cdot \frac{N_c}{9} \sum_{n \leq 0} \langle n | r \sin F(r) \gamma^0 [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}] |n\rangle\end{aligned}$$

まとめると

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=1)}(x) dx = J_f^{(I=1)} + \delta J^{(I=1)}$$

ただし

$$J_f^{(I=1)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{N_c}{3} \right) \sum_{n \leq 0} \langle n | \tau_3 \left(L_3 + \frac{1}{2} \Sigma_3 \right) | n \rangle$$
$$\delta J^{(I=1)} = -M \frac{N_c}{18} \sum_{n \leq 0} \langle n | r \sin F(r) \gamma^0 [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}] | n \rangle$$

ここで、 $J_f^{(I=1)}$ の部分はクォーク角運動量演算子の自由場表式

$$\hat{J}_f^{(I=1)} \equiv \int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left[(\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{p}})_3 + \frac{1}{2} \Sigma_3 \right] \psi(\mathbf{x}) d^3x = \hat{L}_f^{(I=1)} + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}^{(I=1)}$$

の陽子行列要素になっている。

$$J_f^{(I=1)} = \langle p \uparrow | \hat{J}_f^{(I=1)} | p \uparrow \rangle,$$

しかし、 $\delta J^{(I=1)}$ の項があるので

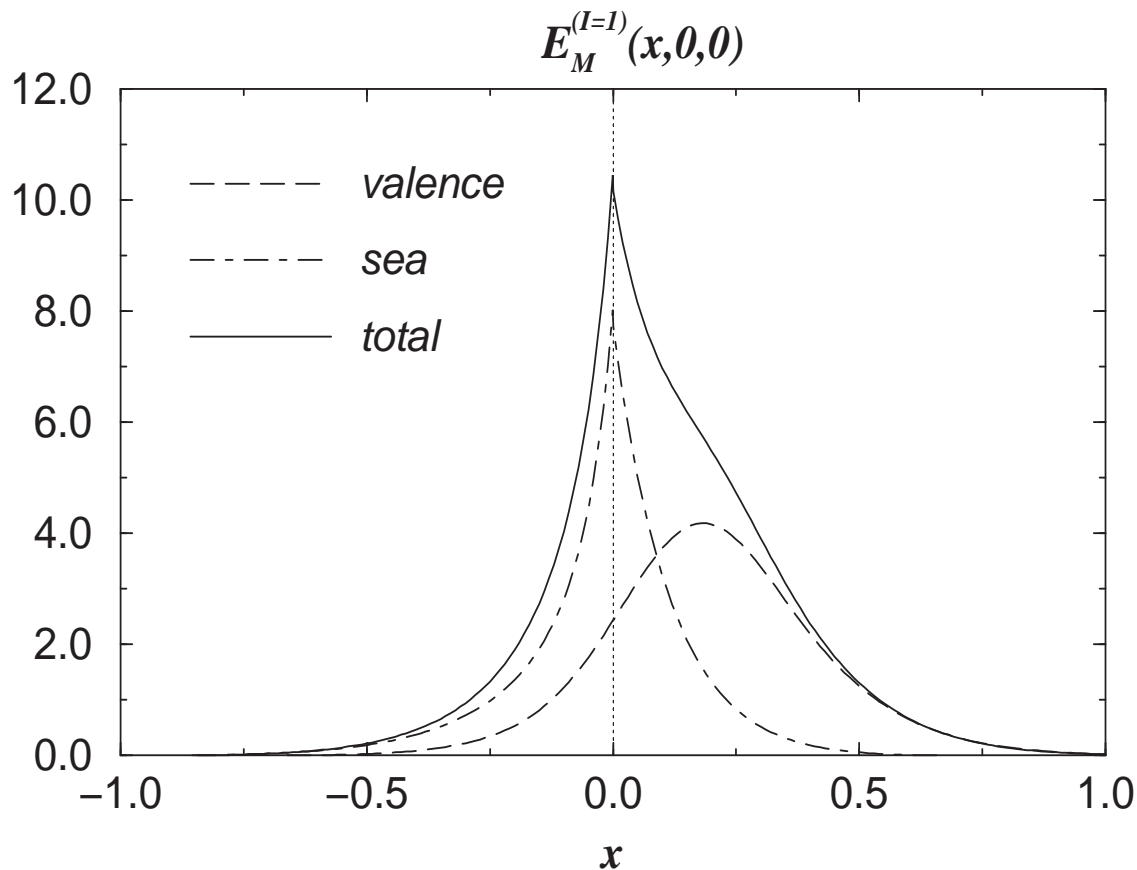
$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=1)}(x) dx \neq J_f^{(I=1)}$$

と naïve な予想とは異なる答えが得られた。

Cf.) アイソスカラーの場合

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e_M^{(I=0)}(x) dx = J_f^{(I=0)}$$

分布 $e_M(x) = E_M(x, 0, 0)$ に対する CQSM の予言



- $e_M^{(I=0)}(x)$ は核子のアイソベクトル磁気能率の Feynman 運動量 x -空間の分布
- Dirac の海クォークの寄与は $x = 0$ の周りに鋭いピーク
- $x = 0$ のクォークは縦方向には止まっているので $e_M^{(I=0)}(x)$ に対する $x \sim 0$ の近傍の大きな寄与はクォーク・反クォークの横方向の運動から生じる

↓

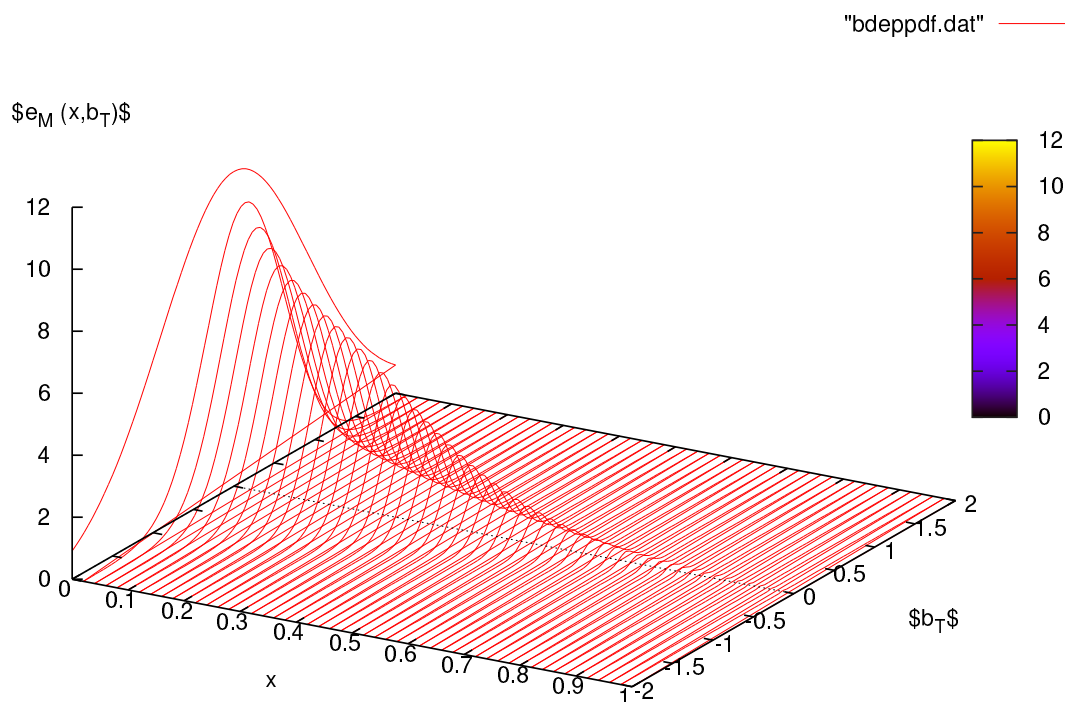
横方向への大きな空間的拡がりを示唆！ (⇔ 中間子の雲)

提案された物理的描像が本当かどうかを確かめる最良の方法を提供するのは対応する**衝突係数依存パートン分布**である

$$\varepsilon_M^{(I=1)}(x, \mathbf{b}_\perp) = \int \frac{d^2 \Delta_\perp}{(2\pi)^2} e^{-i\Delta_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp} E_M^{(I=1)}(x, 0, -\Delta_\perp^2)$$

↓

$e_M(x, \mathbf{b}_\perp)$ に対する**予想される振る舞い**



特徴

- 横方向への拡がりは $x = 0$ の近傍で最も大きく $x = 1$ で 0

() 大きな x を持つクォークはエネルギー・運動量保存により、その分、横方向への運動が制限され、その拡がりも小さくなるから

モーメント和則の数値的検証

(I) 1 次のモーメント

$$\int_{-1}^1 e_M^{(I=1)}(x) dx \simeq 2.07 + 1.79 \simeq 3.86 \quad (\text{積分から})$$

$$\mu^{(I=1)} \simeq 2.05 + 1.87 = 3.92 \quad (\text{直接計算})$$

(I) 2 次のモーメント

	$L_f^{(I=1)}$	$\Sigma^{(I=1)}$	$J_f^{(I=1)}$
valence	0.147	0.705	0.5000
sea	-0.265	0.357	-0.087
total	-0.115	1.057	0.413

	$J_f^{(I=1)}$	$\delta J^{(I=1)}$	sum	$\frac{1}{2} \int x E_M^{(I=1)}(x, 0, 0) dx$
valence	0.500	-0.289	0.211	0.210
sea	-0.087	0.077	-0.010	-0.008
total	0.413	-0.212	0.201	0.202