

4.5. πN シグマ項とカイラリティ奇、ツイスト 3 の分布関数

chiral symmetry breaking part of QCD Hamiltonian

$$\begin{aligned}\Delta H_{QCD} &= m_u \bar{u} u + m_d \bar{d} d \\ &= \frac{m_u + m_d}{2} (\bar{u} u + \bar{d} d) + \frac{m_u - m_d}{2} (\bar{u} u - \bar{d} d)\end{aligned}$$

↓

$$\Sigma_{\pi N} \equiv \langle N | \Delta H_{QCD} | N \rangle \simeq \frac{m_u + m_d}{2} \langle N | \bar{u} u + \bar{d} d | N \rangle$$

$$\begin{aligned}(M_p - M_n)_{QCD} &\equiv \langle p | \Delta H_{QCD} | p \rangle - \langle n | \Delta H_{QCD} | n \rangle \\ &= (m_u - m_d) \langle p | \bar{u} u - \bar{d} d | p \rangle\end{aligned}$$

- 低エネルギー πN 散乱解析より

$$\Sigma_{\pi N} = (45 \sim 70) \text{ MeV}$$

canonical value recent analysis

- 電磁補正

$$\begin{aligned}(M_p - M_n)_{QCD} &= (M_p - M_n)_{exp} - (M_p - M_n)_{e.m.} \\ &\simeq -1.3 \text{ MeV} - 0.76 \text{ MeV} \\ &= -2.0 \text{ MeV}\end{aligned}$$

カイラリティ奇、ツイスト3の分布関数

$$e(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle N | \bar{\psi}(0) \psi(\lambda n) | N \rangle$$

カイラリティ奇の性質のために、通常の包括深部非弾性散乱では観測できないが、最近CLASグループが、準包括深部非弾性散乱で生成される π 中間子の方位角非対称性を測定することにより、最初の情報を引き出すことに成功

$e(x)$ の著しいモーメント和則

$$\int_{-1}^1 e(x) dx = \langle N | \bar{\psi}(0) \psi(0) | N \rangle = \frac{\sum_{\pi N}}{m_q}$$

$$\int_{-1}^1 x e(x) dx = \frac{m_q}{M_N} N_q$$

Burkardt と Koike の摂動論的 QCD 解析

- $e(x)$ は $x = 0$ に δ 関数型特異性を有する
- πN シグマ項 和則はこの特異性を含まないと破れる

↓

$\delta(x)$ 型特異性の物理的起源は？

出発点（場の理論的定義式）

$$e(x) = M_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_0}{2\pi} e^{-ixM_N z_0} \langle N | \bar{\psi}(0) \psi(z) | N \rangle |_{z_3=-z_0, z_{\perp}=0}$$

以下、 $e(x)$ は、次のアイソスカラー部分を表すものとする。

$$e^{(I=0)}(x) = e^u(x) + e^d(x)$$

CQSMによる理論式（主要項）

$$e(x) = M_N \int \frac{dz_0}{2\pi} e^{-ixM_N z_0} E_U(z_0),$$

$$E_U(z_0) = N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{n \leq 0} e^{iE_n z_0} \Phi_n^\dagger(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip_3 z_0} \Phi_n(\mathbf{p})$$

ただし

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n, \quad H = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + M\beta e^{i\gamma_s \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} F(r)}$$

$e(x)$ における $\delta(x)$ 項の存在は $E_U(z_0)$ の以下の振る舞いを示唆

$$E_U(z_0) \xrightarrow{z_0 \rightarrow \infty} E_U^{reg}(z_0) + \text{定数?} \quad (E_U^{reg}(z_0) \xrightarrow{z_0 \rightarrow \infty} 0)$$

物理的真空 ($U = 1$) との差

$$E_U(z_0) \rightarrow E(z_0) \equiv E_U(z_0) - E_{vac}(z_0)$$

$$E_{vac}(z_0) = E_{U=1}(z_0)$$

$$E_{vac}(z_0) = N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{k(E_k^{(0)} < 0)} e^{iE_k^{(0)} z_0} \Phi_k^{(0)\dagger}(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip_3 z_0} \Phi_k^{(0)}(\mathbf{p})$$

ただし

$$H_0 \Phi_k^{(0)} = E_k^{(0)} \Phi_k^{(0)}, \quad H_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{i} + M\beta$$

$\Phi_k^{(0)}$ は有効質量 M の平面波クォーク状態だから

$$E_{vac}(z_0) = -4 N_c M V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\sqrt{k^2+M^2} z_0}}{\sqrt{k^2+M^2}} e^{ik_3 z_0}$$

↓

$$E_{vac}(z_0) = -4 N_c M V \left\{ \Delta^{(1)}(z; M^2) + i \Delta(z; M^2) \right\} \Big|_{z_3=-z_0, z_\perp=0}$$

ここで $\Delta^{(1)}, \Delta$ は標準的な不変デルタ関数

$$\Delta^{(1)}(z; M^2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - M^2) e^{-ipz}$$

$$\Delta(z; M^2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - M^2) e^{-ipz}$$

ただし、 $\epsilon(u) = u/|u|$, $\epsilon(0) = 0$

↓

$E_{vac}(z_0) \longleftrightarrow$ 不変デルタ関数の光円錐極限

$z^2 = 0$ の近傍の振る舞い (中西、「場の量子論」)

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}(z; M^2) &= -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ P \frac{1}{z^2} - \frac{M^2}{4} \ln(M^2 |z^2|) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{2} \left(\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right\} \\ \Delta(z; M^2) &= -\frac{1}{2\pi} \epsilon(z_0) \left\{ \delta(z^2) - \frac{M^2}{4} \theta(z^2) + O(z^2) \right\}\end{aligned}$$

CQSM は **物理的切断** と共に定義される有効模型

double-subtraction Pauli-Villars regularization

removes all the divergences

$$E_{vac}^{reg}(z_0) \equiv E_{vac}(z_0) - \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{\Lambda_i}{M} \right) E_{vac}^{\Lambda_i}(z_0)$$

$$1 - \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{\Lambda_i}{M} \right)^2 = 0 \quad (A)$$

$$1 - \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{\Lambda_i}{M} \right)^4 = 0 \quad (B)$$

$E_{vac}(z_0)$ において

条件 (A) : $\delta(z^2), P(1/z^2)$ 等の項を除去

条件 (B) : $M^2 \theta(z^2), M^2 \ln |z^2|$ 等の項を除去

正則化された答

$$E_{vac}^{reg}(z_0) = -V \frac{N_c M}{2\pi^2} \left\{ M^2 \ln M^2 - \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{\Lambda_i}{M} \right)^2 \Lambda_i^2 \ln \Lambda_i^2 \right\}$$

右辺は真空クォーク凝縮の模型表式に比例

$$E_{vac}^{reg}(z_0) = V \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{vac}$$

上式の右辺は系の全体積に比例するので無限大の量であるが、我々が実際に興味があるのは以下の差の量

$$E_U(z_0) - E_{vac}(z_0)$$

$E_U(z_0)$ の正確計算は数値的に実行するしかないが、ここでは derivative 展開で近似的に評価

[出発点] 分布関数の Green 関数表現 (Diakonov)

$$e(x) = e_2(x) + e_2^*(x)$$

ここで

$$\begin{aligned} e_2(x) = & N_c M_N \int_0^\infty \frac{dz_0}{2\pi} e^{-ixM_N z_0} \\ & \times \int d^3 \mathbf{R} \left\{ \text{Tr } i G(-z_0, z_0 \mathbf{e}_3 - \mathbf{R}; 0, -\mathbf{R}) \right. \\ & \left. - \text{Tr } i G^{(0)}(-z_0, z_0 \mathbf{e}_3 - \mathbf{R}; 0, -\mathbf{R}) \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$G(x^0, \mathbf{x}; y^0, \mathbf{y}) = - \left\langle x^0, \mathbf{x} \left| \frac{1}{i \not{\partial} - MU\gamma_5} \right| y^0, \mathbf{y} \right\rangle$$
$$G^{(0)}(x^0, \mathbf{x}; y^0, \mathbf{y}) = - \left\langle x^0, \mathbf{x} \left| \frac{1}{i \not{\partial} - M} \right| y^0, \mathbf{y} \right\rangle.$$

derivative 展開の主要項

$$G(x^0, \mathbf{x}; y^0, \mathbf{y}) - G^{(0)}(x^0, \mathbf{x}; y^0, \mathbf{y})$$
$$= M [U\gamma_5(\mathbf{y}) - 1] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{M^2 - k^2 - i\varepsilon} + \dots$$

これより結局

$$e(x) = M_N \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 e^{-ixM_N z_0} E(z_0)$$

ただし

$$E(z_0) = \frac{1}{8} \int d^3 \mathbf{R} \text{Tr} [U\gamma_5(\mathbf{R}) - 1]$$
$$\times (-4 N_c M) \left\{ \Delta^{(1)}(z; M^2) + i\Delta(z; M^2) \right\} \Big|_{z_3 = -z_0, z_{\perp} = 0}$$

正則化を実行すると

$$E(z_0) = \int d^3 r [\cos F(r) - 1] \times \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{vac}$$

πN シグマ項と核子のスカラー電荷 $\bar{\sigma}$ との関係式

$$\Sigma_{\pi N} = m_0 \bar{\sigma} = -f_\pi^2 m_\pi^2 \int d^3r [\cos F(r) - 1]$$

Gell-Mann-Oakes-Renner 関係式

$$m_0 \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{vac} = -f_\pi^2 m_\pi^2$$

の2つの関係式を用いて

$$E(z_0) = \bar{\sigma} = \text{有限な定数} \quad (= \text{核子のスカラー電荷})$$

↓

$$e(x) \simeq \bar{\sigma} \delta(x)$$

$E(z_0)$ が $z_0 \rightarrow \infty$ でも0にならない理由？

↓

次ページの図

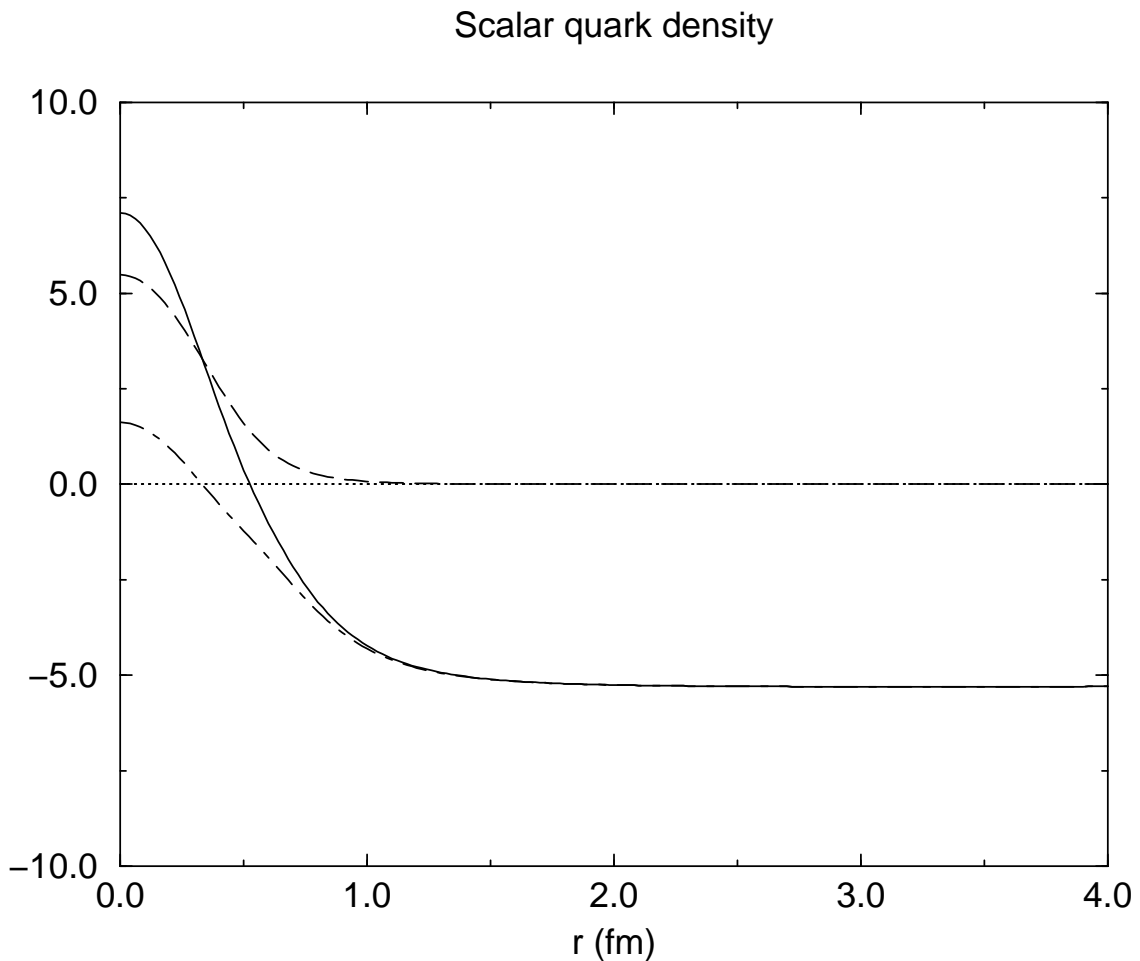
- Dirac-sea クォークの寄与のために、核子のスカラー電荷密度は核子の中心から無限に離れても0にならず、真空クォーク凝縮に近づく

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \int d^3x [\langle N | \bar{\psi} \psi(x) | N \rangle - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{vac}] \\ &= \int d^3x \langle N | \bar{\psi} \psi(x) | N \rangle - V \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{vac} = \text{有限}\end{aligned}$$

↓

$e(x)$ に存在する δ -関数型特異性の起源は
クォーク間の **スカラー型長距離相関** (真空凝縮)

核子のスカラー電荷密度 (CQSM の予言)



derivative 展開に基づく近似的評価の結論は

$$e(x) = \bar{\sigma} \delta(x)$$

↓

原点以外で $e(x) \equiv 0$?

厳密数値計算の結果

- δ 関数型特異性の存在は数値計算でも確かめられた
- $e(x)$ は $x \neq 0$ でも非自明な構造を持つ

how to confirm $\delta(x)$ numerically ?

smeared distribution

$$e_\gamma(x) \equiv \frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2/\gamma^2} e(x') dx'$$

$e_\gamma(x)$ 中の $\delta(x)$

↓

$e_\gamma(x)$ 中に γ の巾を持つガウス型関数として現れる

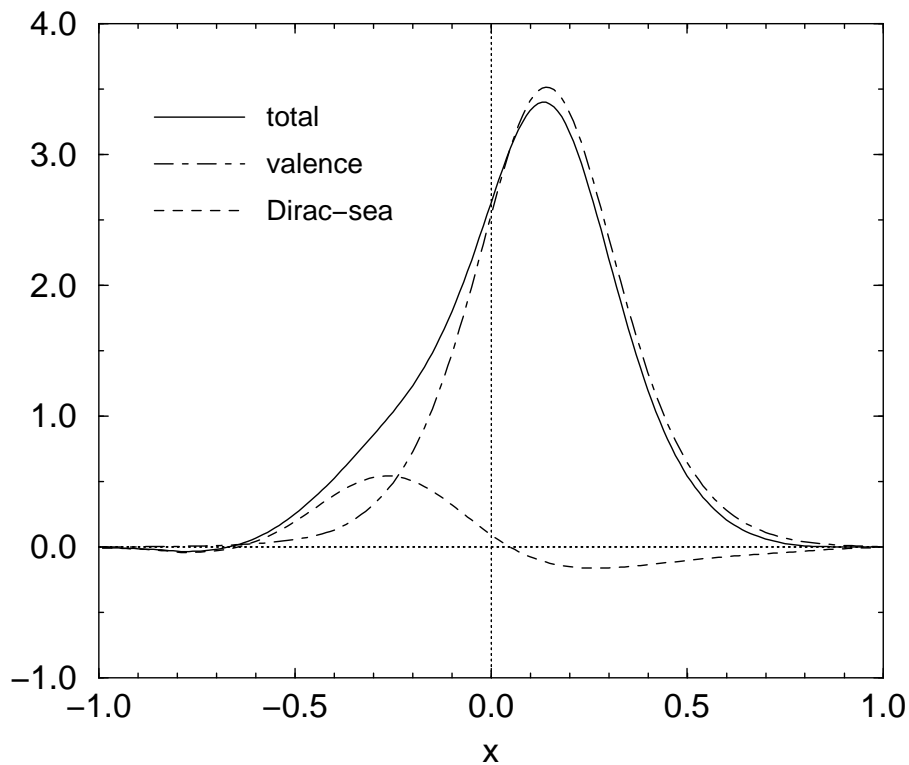
$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\gamma^2}$$

結果をまとめると

$$e^{(I=0)}(x) = e_{val}^{(I=0)}(x) + e_{sea}^{(I=0)}(x)$$

ただし

$$e_{sea}^{(I=0)}(x) = C \delta(x) + e_{reg}^{(I=0)}(x) \quad (C \simeq 9.92)$$

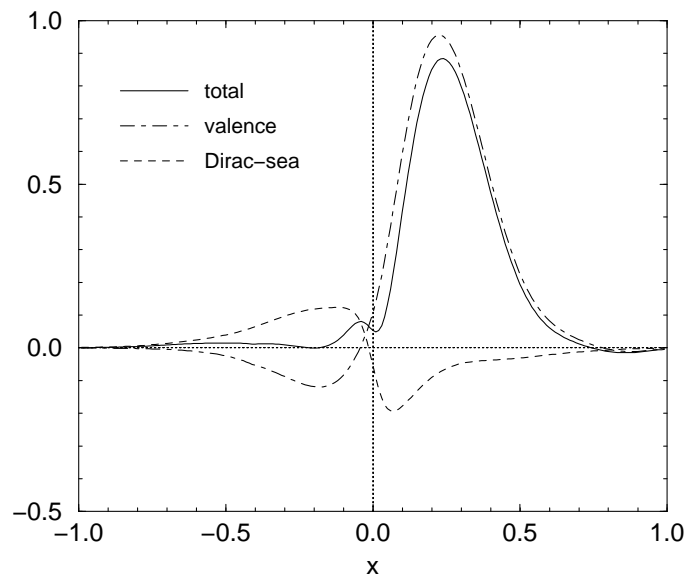


1st moment

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \int_{-1}^1 e^{(I=0)}(x) dx \\ &= \bar{\sigma}_{val} + \left(\bar{\sigma}_{sea}^{sing} + \bar{\sigma}_{sea}^{reg} \right) \\ &\simeq 1.7 + (9.92 + 0.18) = 11.8 \end{aligned}$$

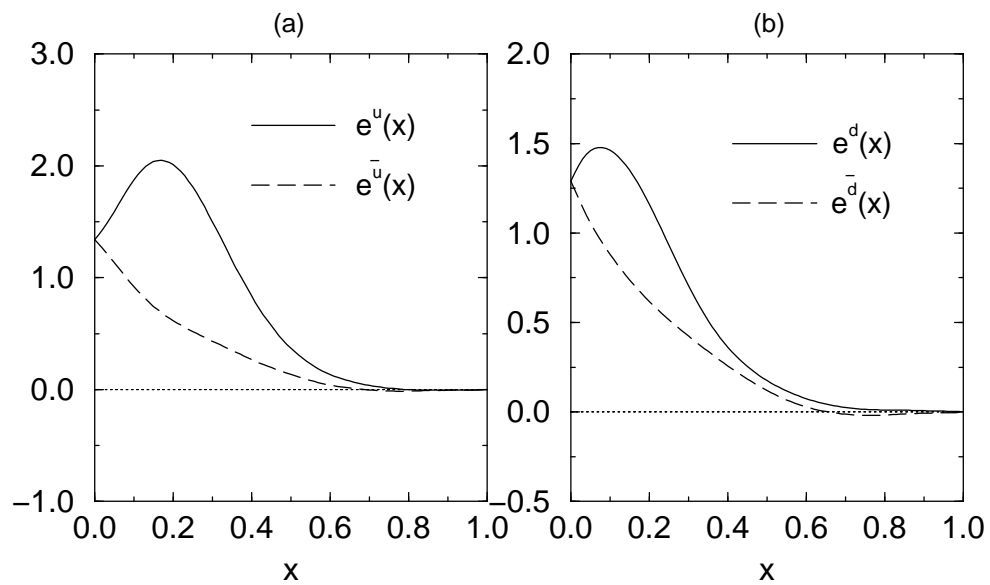
$$\text{if } m_0 \simeq 5 \text{ MeV} \implies \Sigma_{\pi N} = m_0 \bar{\sigma} \simeq 60 \text{ MeV}$$

Isvector part $e^{(I=1)}(x)$



Flavor decomposition

$$e^u(x), e^d(x), e^{\bar{u}}(x), e^{\bar{d}}(x)$$



Preliminary comparison with CLAS data

$$\vec{e}p \rightarrow e' \pi^+ X \quad \text{at } Q^2 \sim 1.5 \text{ GeV}^2$$

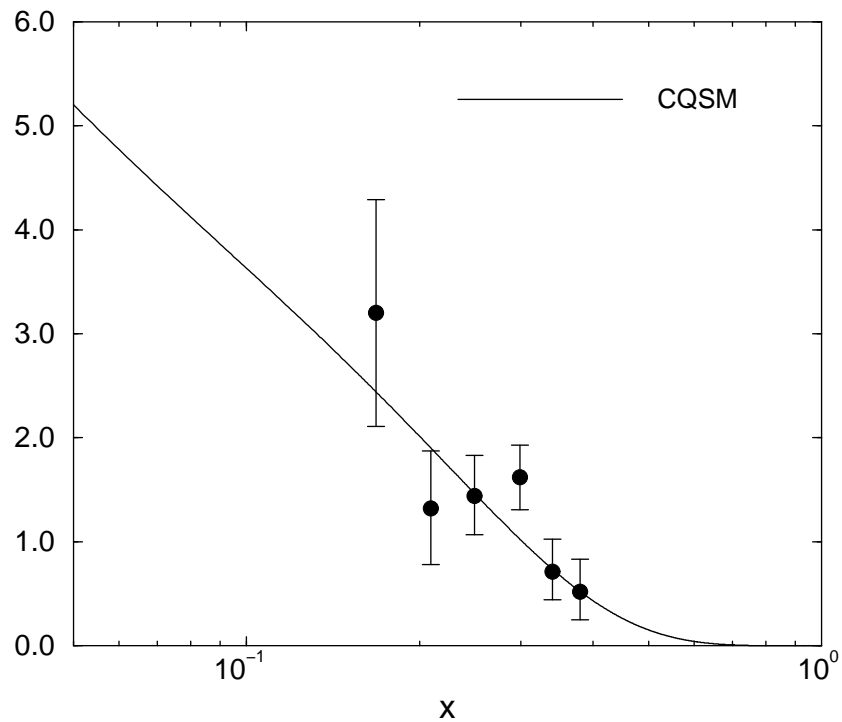
assuming Collins mechanism dominance

$$A_{LU}^{\sin\phi} \sim \frac{4\pi\alpha_s}{Q^4} \lambda_e 2y \sqrt{1-y} \sum_a e_a^2 x^2 e^a(x) H_1^{\perp a}(x)$$

$H_1^{\perp a}(x)$: Collins Fragmentation Function

dominant-flavor-only approximation (A.V. Efremov et. al.)

$$e^u(x) + \frac{1}{4} e^{\bar{d}}(x)$$



πN シグマ項の物理のまとめ

- CQSM は最近の πN 散乱の解析が示唆する非常に大きな πN シグマ項を再現する

$$\begin{aligned}\Sigma_{\pi N} &= \Sigma_{\pi N}^{val} + \Sigma_{\pi N}^{sea} \\ &\simeq 8.5 + 50.5 = 60 \text{ (MeV)}\end{aligned}$$

- 3個の valence クォークの寄与は全体の15%以下に過ぎない
- πN シグマ項 (あるいは核子のスカラー電荷) という量は **Naive Quark Model** の **stumbling block** の一つ



何故 CQSM はうまく行くか？



- CQSM は toy model ではあるが零でない真空クォーク凝縮とその中の局所的励起であるバリオンの構造を同時に記述できる唯一の有効モデルである

局所的バリオン構造 \oplus **非自明真空構造**

以下で見るように、この性質はまた、核子中の**ストレンジ成分**は何故スカラーチャネルでのみ異常に大きいのかを極めて自然に説明する。

スカラー電荷 (またはクォーク凝縮) のフレーバー分解

— SU(3) CQSM in the flavor symmetric limit —

$$\begin{aligned}
 \langle p|\bar{u}u|p\rangle &= \frac{1}{3} \langle N|\bar{\psi}\psi|N\rangle + \frac{1}{2} \langle N|\bar{\psi}\lambda_3\psi|N\rangle + \frac{1}{2} \langle N|\bar{\psi}\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\psi|N\rangle \\
 \langle p|\bar{d}d|p\rangle &= \frac{1}{3} \langle N|\bar{\psi}\psi|N\rangle - \frac{1}{2} \langle N|\bar{\psi}\lambda_3\psi|N\rangle + \frac{1}{2} \langle N|\bar{\psi}\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\psi|N\rangle \\
 \langle p|\bar{s}s|p\rangle &= \frac{1}{3} \langle N|\bar{\psi}\psi|N\rangle - \langle N|\bar{\psi}\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\psi|N\rangle
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \langle N|\bar{\psi}\psi|N\rangle &= \bar{\sigma} \\
 \langle N|\bar{\psi}\lambda_3\psi|N\rangle &= \frac{1}{30} \bar{\sigma} + \frac{7}{10} \left(\frac{K_1}{I_1} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{K_2}{I_2} \right) \\
 \langle N|\bar{\psi}\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\psi|N\rangle &= \frac{1}{10} \bar{\sigma} + \frac{1}{10} \left(\frac{K_1}{I_1} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{K_2}{I_2} \right)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &\equiv N_c \sum_{n \leq 0} \langle n|\gamma^0|n\rangle - \text{vacuum subtraction} \\
 I_1 &= \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n \leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n|\lambda_3|m\rangle \langle m|\lambda_3|n\rangle \\
 I_2 &= \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n \leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n|\lambda_4|m\rangle \langle m|\lambda_4|n\rangle \\
 K_1 &= \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n \leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n|\lambda_3|m\rangle \langle m|\lambda_3\gamma^0|n\rangle \\
 K_2 &= \frac{N_c}{2} \sum_{m>0, n \leq 0} \frac{1}{E_m - E_n} \langle n|\lambda_4|m\rangle \langle m|\lambda_4\gamma^0|n\rangle
 \end{aligned}$$

模型が予言する慣性能率パラメター

	I_1	I_2	K_1	K_2
val	0.888	0.416	0.499	0.307
sea	0.291	0.127	-0.000	-0.003
tot	1.179	0.543	0.499	0.304

前に述べたように

$$\begin{aligned}\langle p|\bar{\psi}\psi|p\rangle &= \langle p|\bar{\psi}\psi|p\rangle_{val} + \langle p|\bar{\psi}\psi|p\rangle_{sea} \\ &\simeq 1.7 + 10.1\end{aligned}$$

一方、陽子中で

$$\begin{aligned}\langle p|\bar{\psi}\lambda_3\psi|p\rangle_{val} &\simeq \frac{1}{10} \times 1.7 + \frac{1}{10} \times \frac{0.499}{1.179} + \frac{3}{5} \cdot \frac{0.307}{0.5437} \\ &\simeq 0.55 \\ \langle p|\bar{\psi}\lambda_3\psi|p\rangle_{sea} &\simeq \frac{1}{10} \times 10.1 + \frac{1}{10} \times (-0.000) + \frac{3}{5} \times (-0.003) \\ &\simeq 1.01\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\langle p|\bar{s}s|p\rangle &= \frac{1}{3} \langle p|\bar{\psi}\psi|p\rangle - \langle p|\bar{\psi}\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\psi|p\rangle \\ &= \langle p|\bar{s}s|p\rangle_{val} + \langle p|\bar{s}s|p\rangle_{sea} \\ &= \left(\frac{1}{3} \times 1.7 - 0.55\right) + \left(\frac{1}{3} \times 10.1 - 1.01\right) \\ &= 0.017 + 2.36 \simeq \text{fairly large}\end{aligned}$$

一方、クォーク数演算子は

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi \iff Q_5 = \int d^3x \bar{\psi} \psi = \int d^3x \psi^\dagger \gamma^0 \psi$$

陽子中のクォーク数

$$\begin{aligned} \langle p | u^\dagger u | p \rangle &= \frac{1}{3} \langle p | \psi^\dagger \psi | p \rangle + \frac{1}{2} \langle p | \psi^\dagger \lambda_3 \psi | p \rangle + \frac{1}{2} \langle p | \psi^\dagger \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \psi | p \rangle \\ \langle p | d^\dagger d | p \rangle &= \frac{1}{3} \langle p | \psi^\dagger \psi | p \rangle - \frac{1}{2} \langle p | \psi^\dagger \lambda_3 \psi | p \rangle + \frac{1}{2} \langle p | \psi^\dagger \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \psi | p \rangle \\ \langle p | s^\dagger s | p \rangle &= \frac{1}{3} \langle p | \psi^\dagger \psi | p \rangle - \langle p | \psi^\dagger \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \psi | p \rangle \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \langle p | \psi^\dagger \psi | p \rangle &= N_c \sum_{n \leq 0} \langle n | n \rangle - \text{vacuum subt.} = N_c = 3 \\ \langle p | \psi^\dagger \lambda_3 \psi | p \rangle &= \frac{1}{30} \cdot 3 + \frac{7}{10} \left(\frac{I_1}{I_1} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{I_2}{I_2} \right) = 1 \\ \langle N | \psi^\dagger \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \psi | N \rangle &= \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \left(\frac{I_1}{I_1} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{I_2}{I_2} \right) = 1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \langle p | u^\dagger u | p \rangle &= \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2 : \text{u-クォーク数} \\ \langle p | d^\dagger d | p \rangle &= \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 : \text{d-クォーク数} \\ \langle p | s^\dagger s | p \rangle &= \frac{1}{3} \cdot 3 - 1 = 0 : \text{s-クォーク数} \end{aligned}$$